REVISTA CIENTÍFICA

EFI
EDUCACIÓN
FORMACIÓN
INVESTIGACIÓN

Vol. 7 · N° 12 JULIO 2021

DOSSIER

DESAFÍOS EN EL ESTUDIO, USO Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Una publicación científica de la **Dirección General de Educación Superior** · ISSN 2422-5975, en línea

Secretaría de EDUCACIÓN

Ministerio de EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA

ENTRE TODOS

EFI
EDUCACIÓN, FORMACIÓN E INVESTIGACIÓN
ISSN 2422-5975, en línea

Revista de la Dirección General de Educación Superior (DGES)
Ministerio de Educación, Gobierno de la Provincia de Córdoba, Argentina.
http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/efi

REVISTA CIENTÍFICA
EFI
DGES

Vol. 7
Nº 12
Dossier

JULIO 2021

Imagen de tapa
"TF 1" (2013) *de* **Sergio Massera**
Diseño digital sobre papel, 60 x 60 cm.

Diseño y maquetación general
moovestudio
www.moovestudio.com

Vol. 7
N° 12
Dossier
JULIO
2021

SUMARIO

EDITORIAL

ARTÍCULOS

ENTREVISTA

EDITORIAL

Desafíos en el estudio, el uso y la enseñanza de la matemática en diferentes espacios

por **Dilma Fregona y Viviana Audisio**

Este número especial destinado a Educación Matemática fue pensado como un aporte para discutir modos de construcción de los conocimientos en tareas específicamente vinculadas a la matemática en aulas de diferentes niveles del sistema educativo, como así también en tareas extraescolares. Corresponde aclarar que los estudios y las experiencias aquí presentadas fueron realizados en períodos anteriores a la declaración del aislamiento social preventivo, no así la escritura de los artículos que forman parte de esta edición.

Al momento de proyectar este número, al menos cuatro premisas guiaron el proceso: difundir problemáticas de investigación diseñadas y desarrolladas en nuestro país; dar a conocer/ actualizar corrientes actuales de investigación con las cuales los diferentes grupos de trabajo se nutren y las profundizan; incentivar a docentes para que, en posición de investigadores en su comunidad –sea por su vinculación académica con la Dirección General de Educación Superior (DGES) o con proyectos en diferentes espacios universitarios– sistematicen sus estudios/ innovaciones y favorezcan la reflexión en otros actores vinculados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática; y propiciar los trabajos en colaboración, brindando espacio para artículos escritos por varios autores o producciones inscriptas en tareas compartidas. Un recorrido por las referencias bibliográficas da cuenta del eclecticismo de las perspectivas teóricas adoptadas: diferentes conceptualizaciones de la modelización matemática, el uso de tecnologías de la información y la comunicación, aproximaciones propias de la didáctica de la matemática, de enfoques etnográficos en educación, entre otras.

Es nuestra intención contribuir a reflexionar sobre los desafíos renovados que nos presenta la educación, con la expectativa de que los actores de diferentes comunidades educativas (profesores y también estudiantes) desempeñen un papel activo en el estudio de los fenómenos didácticos y en la mejora de la difusión de los conocimientos matemáticos en nuestras sociedades. Particularmente en tiempos de pandemia, tal como señalan Sadovsky y Castorina (2020) a partir de los trabajos de Sensevy y Mercier (2007), se interrumpió el proceso de enseñanza como una acción conjunta orgánicamente interactiva. Las condiciones impuestas por los cuidados sanitarios hicieron que la acción conjunta entre quienes aprenden y quienes enseñan adoptara otras características; por lo tanto, buena parte de las referencias que enmarcaban las interacciones dejaron de funcionar. A este escenario complejo, inserto en contextos socioeconómicos y culturales de profunda desigualdad, se suman las condiciones de posibilidad al acceso y uso de tecnologías de la información y la comunicación, problemática de alta vigencia en estos tiempos de alternancia entre presencialidad y virtualidad. Las potencialidades y limitaciones de esos recursos fueron, son y serán objeto de estudio en diferentes ámbitos de la vida social.

A lo largo de la lectura de los artículos es posible reconocer el emergente de una tensión que está vigente tanto en la formación de docentes como en ciertas modalidades del sistema: nos referimos a la interacción –no siempre reconocida como objeto de estudio– entre los conocimientos escolares y los extraescolares. Y en las prácticas de enseñanza, las formas en que estos últimos son considerados positivamente, incorporados en las escuelas. A veces, en este tiempo de enseñanza virtual, el vínculo pedagógico visibilizó para el colectivo docente la heterogeneidad de condiciones de vida, trabajo y estudio de los estudiantes. Hay aquí retos y problemáticas que si bien fueron objeto de reflexiones y propuestas, necesitan ser profundizados.

Integran este número especial seis artículos, dos experiencias de aula y una entrevista. El primero de los artículos lleva por título “El discurso tecnológico en textos de geometría y en las clases en una escuela primaria”, y los autores son Antúnez, Cuello, De la Fuente y Zar. Presentan algunos hallazgos producto de una investigación realizada en el marco de un proyecto de articulación/ extensión entre la DGES y dos unidades académicas de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). En el escrito, los autores nos invitan a adentrarnos en el discurso tecnológico que construye una docente de sexto grado de Educación Primaria en oportunidad de abordar la enseñanza del concepto de altura de un triángulo y la construcción con escuadra de las tres alturas de un triángulo acutángulo. Cabe señalar que es en el segundo ciclo donde las prescripciones del sistema presionan para que se avance sobre un estudio de los objetos geométricos donde se privilegie el uso de argumentos por sobre mostraciones empíricas. En el establecimiento educativo de la investigación se usa un libro de texto de una misma colección en todos los grados, y precisamente la lección referida a la altura del triángulo está en ruptura con lo habitual. El artículo abre el debate sobre el uso de los libros de texto como organizadores de la tarea docente, el estudio de definiciones aún provisorias en la escolaridad primaria y las construcciones discursivas en las que se incorpora el uso social de vocabulario que, en matemática, permite la creación de un objeto matemático.

En “El valor mostrativo de las expresiones numéricas: tensiones entre las escrituras de les estudiantes y las que ofrece el docente”, Borsani, Luna y Sessa presentan algunos resultados de un trabajo de investigación colaborativo entre docentes de Educación Secundaria y docentes/ investigadores de la Universidad Pedagógica Nacional, orientado al estudio de las condiciones y posibilidades de un tipo de trabajo algebraico sustentado en la recuperación de prácticas aritméticas de los estudiantes.

Los autores señalan que la investigación se sitúa en la búsqueda de las condiciones para involucrar a los estudiantes en un tratamiento algebraico de lo numérico como vía de entrada al pensamiento algebraico, y en este sentido, sostienen que las actividades que enfatizan una mirada sobre la estructura del cálculo aritmético ofrecen a los estudiantes experiencias con lo algebraico, aportando a "construir puentes" entre la aritmética y el álgebra.

En el artículo, los autores nos muestran un análisis de algunos episodios de intercambio entre estudiantes y docente acontecidos en un aula de Educación Secundaria, en oportunidad de resolver problemas que forman parte de una secuencia de enseñanza diseñada por el equipo de investigación y pensada en el contexto de la divisibilidad. La secuencia tiene el propósito de introducir a los estudiantes en prácticas de lectura de la información contenida en expresiones numéricas que involucran varias operaciones. En el análisis, nos invitan a detenernos en el papel del contexto, de las interpretaciones del docente, y de las escrituras y discusiones colectivas, en la construcción de un "tejido" entre las prácticas aritméticas y las algebraicas.

En "La tarea de levantar paredes con ladrillo. Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico", Giménez nos invita a identificar algunos tipos de tareas, técnicas y discursos tecnológicos asociados para construir una pared de ladrillo visto hacia el interior y el exterior de un ambiente. El trabajo de campo fue realizado en una obra pequeña, con ciertas herramientas y materiales de construcción, y en la que participaron tres trabajadores con diferente formación. En albañilería, los mecanismos de transmisión de conocimientos están articulados a través de la participación en la ejecución de las tareas: inicialmente se acarrean materiales y herramientas, mientras tanto empieza la observación, luego pequeñas decisiones que no pongan en riesgo la obra... La verbalización de cómo se hace una tarea y por qué se hace así generalmente no forma parte de la interacción entre los sujetos.

El autor recupera parte de su tesis de Maestría en Investigación Educativa, y analiza la colocación de reglas, subtarea clave de la técnica de construcción, ya que permite determinar los niveles verticales y horizontales de las hileras de ladrillos. El problema inicial en este artículo es ¿cómo colocar las reglas verticalmente para que la pared a construir sea perpendicular a la capa aisladora (y entonces al piso), y al mismo tiempo que las hileras de ladrillos sean paralelas a la capa aisladora? El oficial o el capataz de la obra es el que aborda la tarea: resultan de interés las explicaciones de las técnicas, es decir, los discursos tecnológicos por parte de los sujetos involucrados, entre ellos, el investigador. Aparecen allí conocimientos matemáticos explicitados de diferentes maneras, válidas todas ellas según el ámbito de pertenencia de los sujetos. Finalmente, el autor explora otras cuestiones: ¿en qué medida el reconocimiento de la matemática implicada en las tareas puede ser útil para la formación de profesionales de la construcción?

En "Uso de videos en la formación inicial de profesores de Matemática como recurso para observar clases", Esteley, Villarreal, Mina y Coirini describen una actividad muy promisoria en la formación inicial o continua de profesores, que consiste en ver, examinar, analizar, discutir y reflexionar sobre videos de prácticas docentes diversas, con matices distintos según los autores y/o las perspectivas teóricas. Las autoras destacan como actividades centrales del proceso la observación del video, que permite ir más allá del registro de una clase en vivo, y la escritura del informe, que implica un proceso de selección de palabras para expresar ideas y volver a reflexionar sobre lo escrito. A partir del análisis de los informes realizados por dos estudiantes avanzadas en oportunidad de observar sus primeras clases simuladas, las autoras muestran evidencias del desarrollo de la competencia denominada *noticing*, vinculada con prestar atención, reconocer y dar sentido a aspectos específicos durante las interacciones en el aula. Además de los informes de ese par de estudiantes, se complementan los datos con fuentes secundarias tales como el video de la clase simulada, las notas de campo de las docentes-investigadoras y materiales de trabajo provistos por la materia de la carrera. Rescatamos los siguientes interrogantes que atraviesan el reporte: ¿cuáles son los aspectos relevantes identificados inicialmente en el video y cómo se amplían los conocimientos para interpretar lo observado? ¿Qué conexiones o relaciones establecidas entre los aspectos observados surgen con respecto a saberes de la actividad docente?

En "Una dificultad del oficio docente en el marco de la reestructuración del sistema de enseñanza en Educación de Jóvenes y Adultos (EDJA)", Gerez Cuevas propone un análisis desde una noción de la teoría antropológica de lo didáctico: las dificultades del oficio. Desde esta perspectiva, los inconvenientes, obstáculos o impedimentos que los y las docentes enfrentan en la realización de las tareas implicadas en su trabajo son concebidos de un modo que trasciende la actuación individual. Con otros aportes teóricos, el autor analiza la reestructuración del sistema de enseñanza a partir de la Ley de Educación Nacional (26.206) en 2006, donde –entre otros aspectos– se apunta a una diferenciación explícita de prácticas vigentes en la escolaridad obligatoria, particularmente en la relación de los sujetos con los objetos de saber. De acuerdo a esas regulaciones, y en un trabajo de campo que además de los documentos curriculares incluye entrevistas y observaciones de clases con tres docentes de la modalidad, la dificultad abordada es ¿cómo sostener un proceso de estudio sostenido de la matemática en el que los estudiantes participen de una actividad de producción de conocimientos matemáticos en el marco de las condiciones singulares en que se desarrolla el trabajo docente en la modalidad EDJA? A partir de diversas regulaciones sobre la enseñanza y la propia construcción del saber docente, las docentes entrevistadas promueven estrategias alternativas a las desarrolladas en tradiciones en la escolaridad infantil.

En "Representación y densidad en los reales: análisis de experiencias de aula", Cedrón, Duarte, Herrera y Lamela analizan el papel que juega la doble representación de los números racionales en el estudio de la propiedad de la densidad en este conjunto numérico. También plantean la necesidad de construir puentes en la escuela secundaria entre los racionales y los reales, a través de la densidad, como un modo de acceso a propiedades del conjunto de los reales, que frecuentemente son un objeto matemático no abordado en ese nivel educativo. De este modo, proponen alimentar la comprensión de los reales al concebir una recta densa de números racionales y distinguirla de una recta densa de números irracionales. Los datos experimentales provienen de cuatro cursos de tercero a quinto año de escuelas secundarias de CABA y provincia de Buenos Aires. Las experiencias de los y las estudiantes con el infinito matemático hasta ese momento siembran el espacio de la clase con conjeturas acerca de lo posible y lo inviable: por un lado, un conjunto que contiene infinitos números necesita extenderse y no puede ser un conjunto acotado; y por otro lado, no es posible concebir un conjunto acotado infinitamente divisible.

El artículo se centra en las argumentaciones de los y las estudiantes acerca de la veracidad de la igualdad $0,\hat{9}=1$, objeto con el cual tenían cierta relación previa. Las reacciones que encontraron en las aulas en donde se llevó a cabo la experiencia no fueron homogéneas: mientras algunos creían y confiaban en la veracidad de la igualdad, otros se manifestaban en duda o en franca oposición. Las autoras nos invitan a entender qué razones subyacen a estas dos posiciones tan concretas y opuestas, tomando para ello las argumentaciones que esgrimen los y las estudiantes durante el tratamiento de esta igualdad en las diferentes aulas.

Las dos experiencias de aula que forman parte de esta edición relatan procesos de formación desarrollados con docentes y estudiantes de dos Profesorados de Educación Matemática con modalidad a término, en el marco de una línea de acción pensada en articulación entre la DGES y la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) de la UNC. Esta línea convocó a docentes de algunas unidades curriculares del campo de la formación específica de los Profesorados de Educación Secundaria en Matemática, con modalidad a término, a participar de espacios de trabajo colaborativo orientados a acompañar los procesos de planificación y desarrollo de propuestas de formación superadoras de las que tradicionalmente caracterizan la enseñanza en estas unidades curriculares.

En "La evolución de la compresión de los significados del concepto 'derivada' en estudiantes de un profesorado en Matemática", Chirino y López describen la primera de las experiencias. Se le propone a la docente de Problemáticas del Análisis Matemático II, correspondiente al tercer año de la carrera, la implementación de una serie de tareas para ser resueltas por los estudiantes, orientadas a potenciar la comprensión de los procesos variacionales asociados al cálculo infinitesimal. Las autoras recuperan una pregunta que durante mucho tiempo dificultó la posibilidad de pensar en formatos de formación diferentes a los tradicionales para el cálculo infinitesimal: ¿cómo hacer accesible la cuantificación de las variables y sus variaciones no sólo para predecir sino también para aproximar, comparar o estimar, teniendo como únicos recursos la aplicación de técnicas algebraicas o el análisis de gráficos estáticos en reducidos tiempos escolares? En la secuencia, esta problemática es resuelta a través de la exploración gráfica, analítica y numérica de diversas situaciones en un entorno de trabajo que se ve beneficiado por la utilización de recursos tecnológicos.

En "De la geometría sintética a la analítica. Una experiencia con Geogebra para estudiar cónicas", Colombo y Heredia sintetizan una experiencia de enseñanza que fue desarrollada en el marco de Problemáticas de la Geometría II, correspondiente al segundo año de la carrera, en la que los estudiantes fueron enfrentados con tareas asociadas al aprendizaje de la Geometría Analítica a partir de situaciones problemáticas de la Geometría Sintética, en particular, el estudio de las cónicas como lugar geométrico. Las tareas propuestas apelaron al uso de construcciones con el Geogebra como forma de promover la exploración, formulación de conjeturas e investigación, evitando recurrir a la exposición por parte del docente de sus fórmulas y características.

Es posible establecer ciertas vinculaciones entre los diferentes trabajos de esta edición. En dos de ellos se recurre a las tecnologías: en las experiencias de aula, a través de programas de geometría dinámica, y en la formación inicial de profesores de Matemática, a través de videos donde participan los propios estudiantes. También observamos la preocupación por discursos tecnológicos elaborados por sujetos en diferentes posiciones: en el artículo relativo a la descripción y el análisis de tareas en obras de albañilería y en el artículo que aborda una clase de geometría en la escuela primaria.

Cierra este número especial una entrevista a la Dra. Patricia Kisbye, Secretaria de Promoción de la Ciencia y las Nuevas Tecnologías, realizada por la Directora General de Educación Superior, Mgtr. Liliana Abrate. En ella se abordan temas vinculados con los objetivos y los desafíos que implicó la creación de la Secretaría, así como las líneas de acción que se vienen desarrollando en el contexto actual. La entrevista hace foco en las problemáticas de la enseñanza de la Matemática que se han identificado en los niveles obligatorios y en la formación docente, en las acciones proyectadas en consecuencia y en las vinculaciones entre la enseñanza de la Matemática y la Programación. La entrevista finaliza con la reseña de las acciones orientadas a la formación docente continua y que se ofrecen a través del Instituto Superior de Estudios Pedagógicos (ISEP).

Dra. Dilma Fregona
Prof. Consulta · UNC

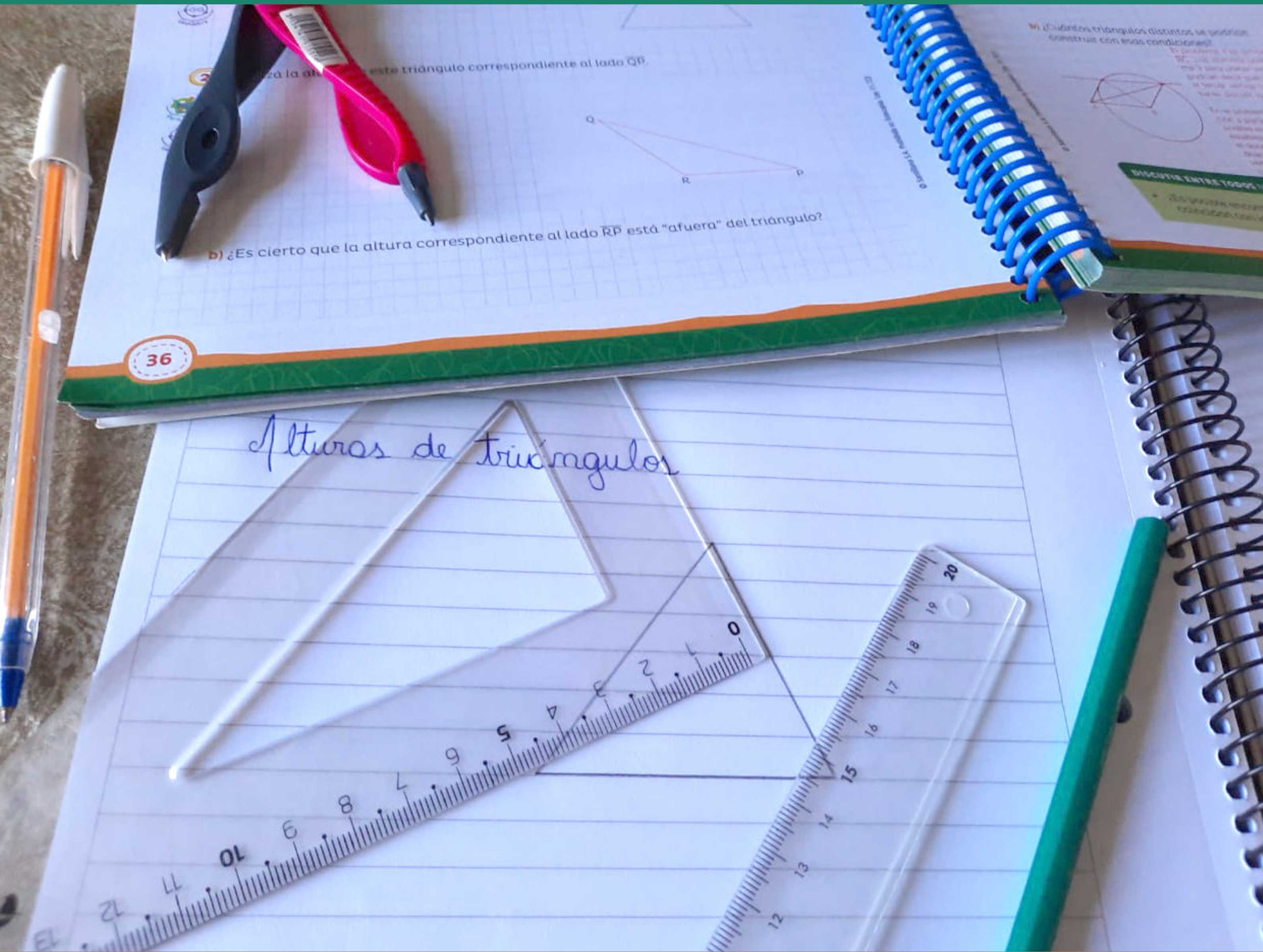
Lic. Viviana Audisio
Área Desarrollo Curricular · DGES

Referencias

Sadovsky, P. y Castorina, A. (2020). Enseñar en tiempos de excepción: nuevos desafíos pedagógicos, incertidumbre y reconocimiento social. En I. Dussel, P. Ferrante y D. Pulfer (comps.) *Pensar la educación en tiempos de pandemia II: experiencias y problemáticas Iberoamérica* (pp. 211-224). Buenos Aires: UNIPE. Disponible en: https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/politicas-educativas/pensar-la-educaci%C3%B3n-en-tiempos-de-pandemia-ii-experiencias-y-problem%C3%A1ticas-en-iberoam%C3%A9rica-detail

Sensevy, G. (2007). Categorías para describir y comprender la acción didáctica. *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes: PUR. (Traducción, con autorización de los autores, de Juan Duque).

El discurso tecnológico en los textos de geometría y en las clases de una escuela primaria



Fotografía instantánea obtenida por los autores.

Daniela Antunez • Soledad Cuello
Mario De la Fuente • Eduardo Zar

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Daniela Antunez

Profesora en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FAMAF), Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Especialización Docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en el nivel primario. Profesora de la Escuela Normal Superior de Alta Gracia en el Profesorado de Educación Inicial y en el Profesorado de Educación Primaria. Profesora de Matemática en primero, quinto y sexto año del nivel secundario. Docente colaboradora en diversos proyectos en el marco de la I Convocatoria a proyectos concursables Dirección General de Educación Superior de la provincia de Córdoba.

Karina Soledad Cuello

Licenciada en Ciencias de la Educación, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Especialista Docente de Nivel Superior en Conducción y Gestión Educativa en la Educación primaria. Profesora de Nivel Superior en la Escuela Normal Superior de Alta Gracia. Profesora de Primero y Segundo Ciclo de la EGB. Vicedirectora de Escuela Primaria.

Mario Enrique De La Fuente

Profesor de Matemática, Física y Cosmografía. Profesor de la Escuela Normal Superior de Alta Gracia en el Profesorado de Educación Primaria y el Profesorado de Educación Inicial. Director de equipos de investigación de diversos trabajos, el último de ellos: "Nueva exploración sobre discursos tecnológicos en clases de geometría en una escuela primaria: el caso de la circunferencia y el círculo" (2019-2020). Ha dictado distintos formatos de capacitación, congresos, talleres y cursos para los niveles primario y secundario.

Eduardo Matías Zar

Profesor en Ciencias de la Educación, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Maestrando en Pedagogía (FFyH, UNC). Profesor en el Profesorado en Educación Especial de la Escuela Normal Superior Alta Gracia. Preceptor nivel secundario, Escuela Superior de Comercio Manuel Belgrano, UNC. Desde 2018 forma parte del proyecto de investigación "Formación de profesores y educación secundaria: trayectorias de formación en contextos de reconfiguración institucional"

El discurso tecnológico en los textos de geometría y en las clases de una escuela primaria

The technological speech in geometry texts and in the classes in a primary school

Daniela Antunez *
Soledad Cuello **
Mario De la Fuente ***
Eduardo Zar ****

Fecha de recepción: 8 de Marzo 2021
Fecha de aceptación: 10 de Mayo 2021

RESUMEN

El presente artículo surge de investigaciones realizadas en torno al abordaje de la geometría en escuelas primarias de la ciudad de Alta Gracia. Sintetizaremos algunos hallazgos que emergieron en una de ellas al enfrentar la enseñanza de alturas de triángulos. El libro que se usa en esa escuela presenta la lección de un modo que está en ruptura con lo habitual, por lo que la docente modifica la forma de gestionar sus clases intentando presentar el nuevo objeto geométrico. En este artículo, centraremos nuestro interés en analizar el discurso que utiliza la docente para explicar o justificar este contenido escolar al recurrir al uso social de la palabra altura.

palabras clave

**discurso tecnológico en geometría · escuela primaria
altura de triángulos**

Contactos

*antunezdaniela111@gmail.com ; **soledad_cuello2005@yahoo.com.ar ;
***marioedlf@gmail.com ; ****zareduardo@gmail.com

ABSTRACT

This article arises from research works on how geometry is addressed in elementary schools in the city of Alta Gracia. We will synthesize some findings that emerged in one of them when facing the teaching of altitude of triangles. The book used in school presents this lesson in a way that is in a break with the usual, so the teacher modifies the way she manages her classes trying to present this new geometric object. In this writing we will focus our interest in analyzing the discourse that he uses to explain or justify this school content by resorting to the social use of the word altitude.

keywords

technological speech in geometry · primary school altitude of triangles

Introducción / Acercamiento al objeto en estudio

En este escrito, presentaremos algunos hallazgos de una investigación realizada en el marco de un proyecto de articulación/extensión iniciado en el año 2014 entre la Dirección General de Educación Superior (DGES), la Facultad de Filosofía y Humanidades (FFyH, UNC) y la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF, UNC).[1]

El proyecto fue construido inicialmente a partir de la recuperación de material empírico de anteriores trabajos de investigación:[2] planificaciones, observaciones de clases, entrevistas, carpetas didácticas. Las relecturas permitieron formular nuevos interrogantes en relación con los discursos de los docentes al presentar objetos matemáticos.

La escuela en la cual se centró nuestro estudio cuenta con seis grados (de primero a sexto) en el turno mañana y otros seis grados en el turno tarde. En esta institución, mediante acuerdos, se decidió la adopción de la serie bibliográfica *Matemática* de Ediciones Santillana. Entre sus autores, figura como coordinadora

1 El proyecto de articulación entre DGES y UNC, iniciado en 2014, llevaba por título "Entramando la matemática y las prácticas educativas para el fortalecimiento de la enseñanza e investigación en Matemática y Educación Matemática", y abarcaba dos líneas de acción. Nuestro trabajo se inscribe en una de ellas: la formación en investigación en Educación Matemática. Por la FFyH, participaron la Dra. María Fernanda Delprato y el Prof. Aníbal Darío Giménez como becario de posgrado, y por FAMAF, el doctorando Nicolás Gerez Cuevas y la Dra. Dilma Fregona.

2 Se participó en dos instancias de investigación propiciadas por la DGES. La primera, durante el período 2011-12, con un proyecto denominado "Análisis sobre las concepciones disciplinares-didácticas que orientan las prácticas de enseñanza de la geometría en una escuela primaria de Alta Gracia". La segunda, denominada "Estudio de las prácticas docentes en relación a la enseñanza de la geometría en dos escuelas primarias de Alta Gracia", se desarrolló entre 2012-13.

Claudia Broitman, y en asesoramiento didáctico, Horacio Itzcovich, quienes cuentan con el reconocimiento del colectivo docente de la escuela y un prestigio a nivel nacional e internacional, particularmente por su participación en la producción de materiales para la enseñanza y la formación docente.

Todos los grados trabajan nociones identificadas en el diseño curricular como conocimiento geométrico. Pondremos nuestra mirada en el segundo ciclo, ya que es en ese período donde las prescripciones del sistema presionan para que se avance sobre un estudio de los objetos geométricos en el que el modo de demostrar la validez de una afirmación no sea empírico (por ejemplo, midiendo o dibujando), sino racional (a través de argumentos). Particularmente, analizaremos una clase de sexto grado en la que se intenta abordar el contenido "alturas de un triángulo".

Nuestro interés se centró en el discurso que utiliza una docente de sexto grado para explicar o justificar el modo de resolver una situación planteada por el libro de texto al comenzar una lección con la definición de *altura de triángulos*. Según refiere el marco teórico que utilizamos para este estudio (la Teoría Antropológica de lo Didáctico –TAD–), la técnica del trazado de alturas de un triángulo, que es la tarea propuesta, necesita un discurso tecnológico que haga entendible o justifique este procedimiento. Este discurso tecnológico lo ofrece el libro de texto, pero la docente no hace uso de este como en otras lecciones, y en cambio elabora uno propio.

En el análisis de la clase de geometría, intentamos identificar los recursos discursivos que utiliza la docente para establecer ese nuevo objeto matemático, en qué consiste este discurso y qué motiva la decisión de desplazarse de la prescripción del libro.

Aspectos teórico-metodológicos

En las últimas décadas, se difundieron tendencias en la enseñanza de la matemática –sobre todo, en el nivel primario– enfocadas en una aproximación a los objetos matemáticos que permita la génesis y los avances en la relación de los sujetos con esos objetos, considerando las prácticas en las que estos se activan en una institución determinada.

Desde la TAD, uno de los enfoques teóricos desde el cual construimos la problemática, el triángulo y sus elementos son uno más de los objetos matemáticos. Chevallard (1991, p. 8) define un objeto matemático como

> (...) un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito.

En este sentido, los significados de los objetos están estrechamente vinculados a los problemas abordados y a la actividad realizada para su resolución, por lo que no puede reducirse el "significado" del objeto a su definición matemática.

> *“Los objetos matemáticos en particular son el resultado de una obra humana, y surgen como respuesta a una cuestión o un conjunto de cuestiones problemáticas que pueden no provenir de la matemática misma.”*

Los objetos matemáticos en particular son el resultado de una obra humana, y surgen como respuesta a una cuestión o un conjunto de cuestiones problemáticas que pueden no provenir de la matemática misma. En la TAD, una obra humana puede ser descripta y estudiada a través de sus componentes: tareas, técnicas, tecnologías y teorías. La tarea refiere a una cuestión puntual a resolver cuya respuesta no está disponible inmediatamente. Chevallard (1999, p. 2) sostiene que

> la noción de tarea o, mejor, de tipo de tareas, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tarea, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo.

Por otro lado, la *técnica* aparece como "una manera de hacer", permite realizar las tareas de una forma relativamente sistemática. Para explicar y justificar esta manera de hacer surge la *tecnología*, en tanto discurso interpretativo y justificativo de la técnica, que la normaliza y explicita su ámbito de aplicabilidad o validez. Finalmente, la *teoría* sirve de fundamento a las tecnologías. Esta consideración de la obra matemática toma validez en la investigación al analizar el tipo de reconstrucción que se hace sobre ella en la escuela. Para que una obra matemática pueda ser estudiada en una institución, necesariamente deberá ser transformada para hacerla accesible a sus alumnos. Este es un fenómeno ligado a la transposición didáctica. Para esta reconstrucción, el docente se cuestiona ¿cuáles serán los problemas que pondrán en juego el objeto a estudiar?, ¿qué tipo de tareas habilitará este proceso?, ¿qué técnicas son inicialmente útiles para trabajar estos problemas?, ¿cómo evolucionarán estas técnicas?, ¿qué elementos tecnológicos se utilizarán para interpretar y justificar esta actividad? Para responder a esta última pregunta, el docente elabora un discurso, el *discurso tecnológico*, que les permitirá a sus alumnos describir, tipificar y justificar sus prácticas.

Tradicionalmente en manuales y en prácticas de enseñanza, los objetos geométricos en particular, pero también las fracciones, por ejemplo, son presentados, mostrados más que reconocidos como conocimientos funcionales. Desde otras perspectivas teóricas, se realizan análisis críticos de esos modos de enseñanza. Desde la escolaridad inicial, la enseñanza de la geometría instala a los alumnos frente a las figuras a través de sus representaciones clásicas. Porras y Martinez (1998, p. 75) sostienen que

> Otra característica de la enseñanza es la particular relación que se propone con los dibujos, ya sea en el aula como en los textos de uso escolar. Para que el alumno pueda reconocer figuras se le suministran "modelos" que pueden considerarse figuras típicas. Es decir, figuras donde se toman regularmente valores idénticos para las variables en juego y, en consecuencia, resultan en su mayoría semejantes, de tamaños similares y en la misma posición. El alumno almacena en su memoria estos "prototipos", los que siempre conciernen a casos particulares. Eso explicaría las dificultades de reconocimiento cuando las figuras no están en la posición habitual o cuando la relación de las dimensiones es muy diferente a las figuras típicas almacenadas.

Por ejemplo, en el caso del objeto triángulo, suele ser presentado como equilátero o isósceles, generalmente con un lado en posición horizontal; más adelante, el alumno deberá extender esta categoría a otros triángulos que no se corresponden con la figura típica, muchas veces, sin contar con un *discurso tecnológico* apropiado como una definición, aún provisoria, que permita distinguir a esa clase de polígonos de otros. Si se toma solo el dibujo, no se podrán distinguir los elementos que constituyen la figura ni las relaciones entre estos, por lo que se hará necesario que la enseñanza se centre en su exploración, a fin de que se hagan "visibles" estas partes constitutivas –los vértices, los lados, los ángulos– que, en el caso de las alturas, por ejemplo, no están trazadas en el objeto. Este es uno de los propósitos formativos de la escuela.

Desde prescripciones curriculares,[3] en el primer ciclo de la escolaridad primaria se pretende avanzar en la exploración de características de figuras, apoyada en la percepción, aunque no se plantean todavía relaciones que puedan ser generalizadas. En el segundo ciclo, se intenta trascender este nivel perceptivo, favoreciendo la puesta en juego y la explicitación de características que permitan analizar propiedades de las figuras que no dependan del dibujo particular que se ha utilizado; el fin es provocar una evolución en la relación entre el dibujo o la representación y el objeto geométrico. Aquí se comienza a dar la transición a través de prácticas donde el estudio de regularidades, semejanzas, diferencias y características de las figuras enriquece la relación con los objetos, involucrando definiciones y propiedades, es decir, se avanza sobre los *discursos tecnológicos.*

Como se mencionó anteriormente, desde el punto de vista metodológico, en esta investigación se utilizó mayormente documentación empírica producida en anteriores trabajos de investigación. Esta documentación se había obtenido con el fin de explorar recurrencias en clases de geometría en escuelas primarias, a fin de caracterizar esas prácticas. En esta ocasión, enfocamos en aquellas situaciones que escapaban a esas recurrencias, como fue el caso de la clase donde se estudia alturas de un triángulo. Observamos que la docente decide no seguir la lección tal como está presentada por el libro de texto. La relectura de los registros y las entrevistas nos permitió plantear nuevos interrogantes, tales como ¿por qué y para qué la docente decide romper con el seguimiento del libro?

3 *Diseño Curricular de Educación Primaria.* Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, Subsecretaría de Educación, Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa, Dirección General de Planeamiento e Información Educativa (2012 - 2015).

El problema abordado

Para construir nuestro objeto de estudio, focalizamos la mirada en el discurso que utiliza una docente para presentar un nuevo objeto matemático en la clase de geometría en un aula de sexto grado.

> *“Para construir nuestro objeto de estudio, focalizamos la mirada en el discurso que utiliza una docente para presentar un nuevo objeto matemático en la clase de geometría en un aula de sexto grado.”*

En este curso, la docente desarrolla los contenidos geométricos siguiendo la propuesta del libro de texto. La secuencia propone tres lecciones consecutivas que se titulan "Reproducir figuras con regla, compás y escuadra", "Relaciones entre circunferencias, triángulos y cuadriláteros", "Alturas de triángulos". En las dos primeras se presentan tareas de copiado sobre hoja lisa, con diversos modelos, copiado variando la escala, tareas de dictado de figuras y situaciones problemáticas donde se recuperan conocimientos de años anteriores acerca de la clasificación de triángulos y propiedades de sus ángulos. En algunas de las consignas se sugieren instrumentos –regla, compás, escuadra–, y con ellos se orienta hacia determinadas técnicas. Se presentan tareas de construcción de triángulos inscriptos en circunferencias y problemas de anticipación. Luego de estas actividades, aparece el "Machete",[4] apartado del libro que brinda información sobre nominación, definiciones y propiedades. El "Machete" funciona como una suerte de institucionalización, es decir, sintetiza los conceptos que tienen relación con el conocimiento al que se apuntó con las tareas, los identifica y da la posibilidad de recuperarlos para reutilizarlos. Nos resulta llamativo que, en estas dos lecciones, no hay una definición de triángulo, aunque sí se lo clasifica según sus lados y ángulos.

Esta modalidad de trabajo –Tareas y Machete– se reitera en general en todo el recorrido del libro, pero cambia cuando aborda el tema "Alturas de triángulos": aquí no comienza con una tarea a realizar por el alumno, sino que se presenta en primer lugar el Machete con la definición del objeto geométrico:

> Se llama altura de un triángulo al segmento perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto a ese lado o a su prolongación. Como los triángulos tienen tres vértices y tres lados, entonces tienen tres alturas. (p. 51)

¿Cómo gestionar esta clase que presenta en primer lugar una definición? ¿Cómo estudiar esa definición que presenta desafíos cognitivos esperables como "segmento perpendicular", "vértice opuesto a un lado", "prolongación de un lado"?

Este discurso tecnológico inicial fuerza a la docente a actuar y buscar los medios que permitan a sus alumnos acceder a este nuevo objeto del cual no disponen relación previa. Como ya dijimos, los objetos abordados en la escolaridad primaria son presentados desde los comienzos a través de imágenes-dibujos sobre una hoja; a medida que se los explora, se convierten en *figuras* que ya no dependen de la calidad del dibujo sino de sus propiedades geométricas. En este caso, al tratarse de un objeto "nuevo", no se dispone de una imagen previa; por lo tanto, la docente debe presentarlo, darlo a conocer. Para este fin, no recurre a la propuesta del libro de texto, que ofrece como presentación la definición, sino que elabora un discurso propio.

En este estudio, focalizamos especialmente en el discurso que la docente realiza en torno al objeto geométrico denominado "alturas de triángulos", con la intención de responder a cuestiones tales como ¿en qué consiste un discurso que cumple las funciones de *discurso tecnológico* en relación con la práctica de enseñanza? ¿Cómo se organiza y desarrolla este discurso? ¿Cómo trabaja el libro de texto ese discurso tecnológico? ¿Cómo lo recupera la docente?

Abordaremos este análisis a partir de los registros de la clase de geometría, que nos habilitarán a estudiar y comprender la propuesta del libro *Matemática en sexto* y la gestión de la clase que lleva adelante la docente.

Los acuerdos en matemática: un libro de texto

Como se mencionó anteriormente, el libro de texto de la serie bibliográfica *Matemática* de Ediciones Santillana se adopta en esta escuela alrededor del año 2007, por acuerdo institucional, de primero a sexto grado. Esta elección operó como elemento de cambio respecto a determinadas prácticas de enseñanza en general, y en particular en lo referente a la geometría. Anteriormente, cada docente elegía el libro de texto para utilizar en su aula, y los enfoques de las diferentes editoriales no siempre coincidían.

Esta decisión institucional produjo una profunda modificación respecto del lugar que ocupaba el libro de texto en el estudio. Hasta 2007, era utilizado para reforzar el trabajo áu-

4 "Machete" es un término utilizado en el ámbito escolar en Argentina y hace referencia a un pequeño papel que contiene las respuestas de una prueba o examen.

lico bajo la forma de "tarea para el hogar". La nueva propuesta bibliográfica impuso pensarlo con otro sentido, al decir de un docente:

> Las situaciones problemáticas el chico no lograba resolverlas solo, entonces siempre tenía que estar con la ayuda del docente, y si vos le dabas una tarea que ni los padres a veces la entendían (...) el libro este nos lleva bastante tiempo porque las situaciones problemáticas son situaciones problemáticas para pensar y para trabajar en el aula, entonces los problemas se trabajan en el aula... [5]

En el mismo sentido, otra docente nos dice:

> ...es un libro que requiere tiempo, entonces por ahí uno avanza más o menos; pero a mí me gusta, me gusta porque a los chicos los hace pensar de otra manera, son desafíos en realidad para ellos, entonces se enganchan.[6]

El libro está organizado en secuencias de actividades y situaciones respecto de un concepto. Propone tareas a realizar individualmente o en pequeños grupos, indica los instrumentos a utilizar y generalmente al final de la secuencia, en el apartado denominado "Machete",[7] presenta una suerte de resumen. En las consideraciones iniciales, los autores alertan que este abordaje requiere aceptar y prever la provisoriedad y el largo plazo en los procesos de construcción de conceptos matemáticos en la escuela.

En la versión *Libro del docente* se aportan precisiones sobre el rol de los problemas que permiten anticipar su impacto en el desarrollo de la clase: "...no se espera entonces que 'salgan bien' desde el primer intento; por el contrario, es la dificultad lo que genera la posibilidad de aprender algo nuevo..." (p. 26). En este sentido, amplía la idea de "problema" a otras prácticas como inventar estrategias de resolución nuevas, o más económicas, explicitar relaciones, interpretar un procedimiento, discutir la validez de una afirmación, copiar una figura, comunicar información para construir un dibujo, etc. La propuesta se organiza en secuencias que presentan similares tipos de problemas y permiten volver sobre una misma situación pero con nuevas herramientas para favorecer avances en su conceptualización. Por ejemplo, se presentan tareas de copiado de figuras, donde se van variando los modelos a copiar; se supone que cada recurso o técnica se convierte en una estrategia validada que luego podrá reinvertirse en otro modelo. Luego de esta secuencia, el "machete" institucionaliza los conocimientos que se supone emergieron de la resolución de las situaciones. Al respecto, en el *Libro del docente* se aclara:

> A lo largo del proceso de estudio es necesario establecer y conocer ciertas convenciones propias del saber matemático: un vocabulario específico, una definición, algunas propiedades. Esta información se presenta bajo el título Machete, están pensadas para que se lean de manera colectiva y sean fuente de consulta en diferentes oportunidades. (p. 26)

El libro de texto es utilizado por la docente en todas las clases donde se abordan nociones de matemática, siguiendo en general la secuencia que este propone. La lógica del texto, como dijimos, "supone" que cada técnica podrá reinvertirse y que los conocimientos son activados e institucionalizados por esas tareas. Hay algunas indicaciones sobre la gestión del docente, pero es fundamentalmente esa la modalidad de trabajo con el libro y la interacción con los alumnos que se propone para llevar adelante la lección.

Gestión de la clase

El recorrido por los distintos registros con los que contaba el equipo permitió identificar distintos momentos de la clase, como así también ciertos modos de gestionar por parte

5 Entrevista a la docente, 26 de agosto de 2011.

6 Entrevista a la docente, 20 de diciembre de 2011.

7 En las ediciones actuales, su nombre es "Para leer entre todos".

de la docente para acompañar las propuestas de las lecciones:

- *Lectura individual* (a veces en pequeños grupos) de la página del libro que se trabajará durante la jornada. Esto incluye consignas a resolver.
- *Realización de las consignas* en forma individual (a veces en pequeños grupos).
- *Intervenciones privadas* de la docente durante la resolución de problemas (al interior de pequeños grupos) cuando se las solicite (ya sea para resolver dudas, para validar respuestas, etc.)
- *Intervenciones públicas* por parte de la docente cuando advierte que las dudas comienzan a hacerse generales y recurrentes. Algunas veces en estas intervenciones se evocan momentos de institucionalización, recuperando definiciones o conceptualizaciones, algunas de estas provenientes de los "Machetes" anteriores, para facilitar la consecución de las tareas.
- *Socialización, validación y puesta en común* de lo que se ha resuelto en cada consigna.

Estas recurrencias son las que se desprenden tanto del análisis de las entrevistas como del registro de clases. Al respecto, la docente nos comenta:

> Bueno... generalmente mi clase empieza con los chicos trabajando solos (...) ellos leen las consignas, (...) y yo empiezo a intervenir cuando empiezan las preguntas. (...) paso por el banco y las voy escuchando y... ahora... cuando ya veo que las preguntas son reiteradas en los distintos grupos... entonces yo ya me vengo al pizarrón y... empiezo yo a trabajar con ellos y a intervenir... No doy mi clase...digamos con todo lo teórico... ¡No!... voy tratando de que ellos vayan resolviendo en la medida en que unos aportan una cosa, otros aportan otra... y así vamos armando (...) y después al final generalmente yo institucionalizo algo y escribo algo en el pizarrón que tiene que ver con lo que estuvimos trabajando. Y es ahí cuando recuperamos el "Machete". Una vez que escribimos todo lo que trabajamos... todo lo que deducimos... todo lo que pudimos rescatar de esto... ahí leemos el "Machete" (...) es la última instancia de la clase (...)[8]

“Bueno... generalmente mi clase empieza con los chicos trabajando solos (...) ellos leen las consignas, (...) y yo empiezo a intervenir cuando empiezan las preguntas. (...) paso por el banco y las voy escuchando y... ahora...cuando ya veo que las preguntas son reiteradas en los distintos grupos... entonces yo ya me vengo al pizarrón y... empiezo yo a trabajar con ellos y a intervenir...”

Esta modalidad de trabajo con el libro se modifica al abordar las alturas de triángulos.

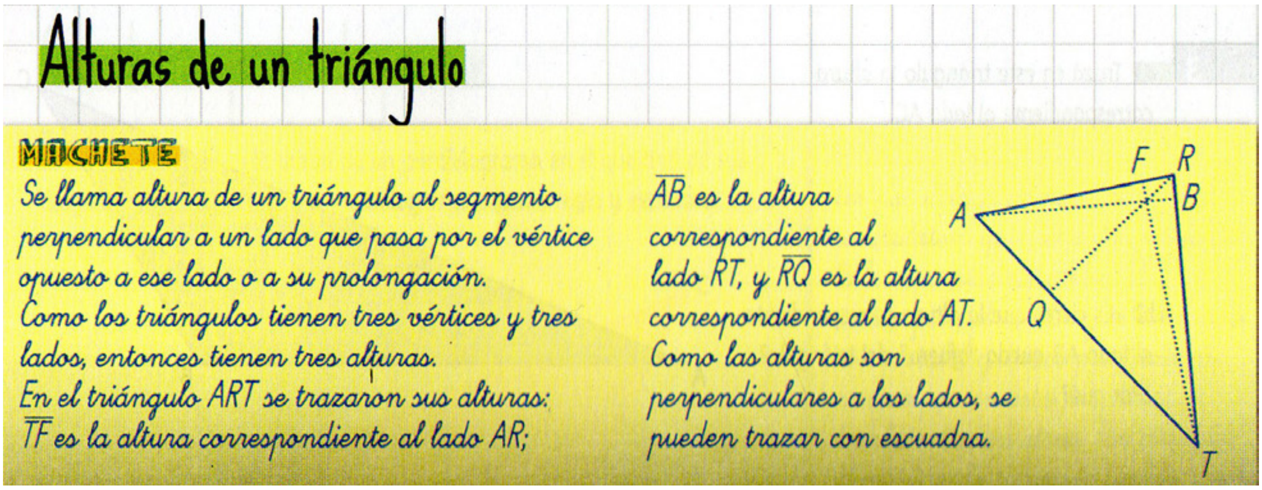
Las alturas de un triángulo

Al abordar "Alturas de un triángulo", la secuencia del libro de texto varía totalmente, ya que aparece el "Machete" como introducción, es decir, no está precedido de alguna tarea que ponga en juego el nuevo objeto.

En el "machete" en cuestión, observamos una definición de altura y la identificación

8 Entrevista a la docente, 22 de mayo de 2017.

 ISSN 2422-5975, en línea



Alturas de un triángulo

MACHETE

Se llama altura de un triángulo al segmento perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto a ese lado o a su prolongación.
Como los triángulos tienen tres vértices y tres lados, entonces tienen tres alturas.
En el triángulo ART se trazaron sus alturas:
$\overline{TF}$ es la altura correspondiente al lado AR;
$\overline{AB}$ es la altura correspondiente al lado RT, y $\overline{RQ}$ es la altura correspondiente al lado AT.
Como las alturas son perpendiculares a los lados, se pueden trazar con escuadra.

Libro de texto *Matemática en sexto*, pág. 51.

de las alturas correspondientes a cada lado sobre un dibujo de un triángulo acutángulo que no tiene lados paralelos a los bordes del cuadro (Broitman, 2010, p. 51). Es decir, la posición del triángulo no responde a la de una figura típica, pero la elección de este tipo de triángulo resulta conveniente, ya que sus alturas son interiores y no coinciden con los lados ni están fuera de estos. Para los casos de los triángulos rectángulos, dos alturas coinciden con los catetos, y en los obtusángulos, dos son exteriores y exigen la prolongación de los lados correspondientes. El dibujo muestra las alturas del triángulo, visibiliza estos elementos que no están habitualmente presentes. No hay indicaciones visuales ni escritas acerca de la técnica para trazarlas, por ejemplo, con una escuadra. En ediciones posteriores se agrega en el dibujo una escuadra que orienta la técnica de trazado.

Presentamos a continuación tres fragmentos de los registros referidos a: el uso social de la palabra altura; el reconocimiento de un triángulo y la identificación de una altura; la primera actividad propuesta por la lección, después del "machete".

La docente toma la decisión de no comenzar con la lectura del libro de texto, ni individual ni grupal como solían realizar, sino que aborda otra estrategia y procede a interrogar a la clase: "Yo les pregunto... ¿qué es la altura de algo?"[9] Continúa: "¿cuál es la distancia que representa mi altura?, ¿y la altura de una heladera?, ¿y la altura de un edificio?". Y agrega: "para medir cualquier altura siempre se toma como referencia el pie o base y se asciende hacia la parte más alta".

Luego de esta introducción, procura asegurarse de que sus alumnos identifiquen los triángulos: mientras toma la escuadra de pizarrón, pregunta: "¿esto tiene forma de triángulo?". "Sí, pero no exacta", contesta un alumno, al mismo tiempo que se da un intercambio entre los compañeros en el que algunos están por la afirmativa y otros por la negativa. "¿Cómo 'no exacta'?", pregunta la maestra. "Si fuera exacta, tendría los dos laterales iguales y el tercero también", contesta el alumno.

Posteriormente, según el registro de la clase, al mostrar la escuadra del pizarrón graduada con el cateto menor ubicado horizontalmente, interroga: "¿cuál es la altura de este triángulo?". Se refiere a la medida, y los alumnos de las primeras filas dicen "57 cm, 58 cm". Luego de esto, rota la escuadra de tal manera que otro lado quede en posición horizontal, e interroga si se tratará del mismo triángulo, a lo que sus alumnos responden a coro que no. "¿Cómo que no?". Algunos alumnos manifiestan dudas, y luego uno de ellos explica que es el mismo triángulo, pero que ha cambiado de posición. La maestra asiente y explica que un triángulo puede tener diferentes bases, dependiendo de su posición "el pie va a cambiar", y

9 Observación de clase de sexto grado en la Escuela Normal Superior de Alta Gracia, 25 de julio de 2013.

retoma esa relación espacial que los alumnos tienen con los objetos triángulo y base (establecida mediante la posición en que se presentan los objetos) para seguir adelante con su proyecto de enseñanza. Luego continúa: "¿qué altura tendrá ahora mi triángulo? ¿Tendrá 58 cm?". A lo que sus alumnos responden a coro "nooo...". Toma la regla y mide 18 cm. De la misma forma hace con el tercer lado, "¿hay alguna otra posición en que yo pueda poner mi triángulo?".[10] "Nooo...", responden sus alumnos. "¿Y cuántas alturas pudimos marcar?". "¡Tres!". "¿Por qué?". "¡Porque hay 3 lados!".

Luego de esta apertura con el "machete" que propone el libro, se continúa con la siguiente actividad:

El triángulo de la actividad responde a la figura típica en clase y posición. La docente se desplaza mesa por mesa para observar cómo se abordan las actividades propuestas y los procedimientos utilizados. Aclara las dudas que se van presentando, que tienen que ver fundamentalmente con la posición de la escuadra para lograr la perpendicular conveniente.

Un análisis de la clase

Es confuso el estatus del reconocimiento de una figura como un triángulo: ¿una escuadra tiene forma de triángulo? Este objeto presentado como triángulo da información sobre las dificultades de la clase para identificarlo y la problemática espacial que se presenta. El libro no ofrece una definición de triángulo que, en tanto *discurso tecnológico*, permitiría identificar si un objeto pertenece o no a una clase determinada, por lo que sería fundamental para poner en marcha un razonamiento o verificarlo. En los textos de la serie destinados al segundo ciclo aparecen en distintos momentos definiciones de varias figuras geométricas –circunferencia, círculo, rectángulo, cuadrado, rombo, paralelogramo– pero no la de triángulo, que tampoco está en los textos del primer ciclo.

En este contexto, la docente sostiene con preguntas y con el uso de la escuadra en el pizarrón la técnica de trazado de las alturas en un triángulo. ¿Qué hacer, ante este panorama? ¿Cómo estudiar en la escuela primaria las alturas de un triángulo, o más ampliamente, cómo trabajar con ciertas definiciones?

En esta lección se trata de estudiar las alturas de un triángulo, es decir, construirlas, definirlas, instalar este nuevo objeto. La docente parte de "altura" en el sentido usual de las palabras (también cuando se refiere a "base"), pero ¿este sentido es equivalente al de "altura" de un triángulo? La altura de un triángulo es un objeto matemático creado por una definición, tal como lo expresa Polya (1945, p. 68):

> Las definiciones dadas en los diccionarios no difieren mucho de las definiciones matemáticas por su forma exterior, pero están redactadas bajo una idea diferente. El autor de un diccionario se ocupa del sentido usual de las palabras. Acepta naturalmente dicho sentido usual y lo establece lo más claramente posible bajo la forma de una definición. El matemático, por el contrario, no se ocupa del sentido usual de sus términos técnicos; al menos no es esta su preocupación principal. (...) La definición matemática crea el significado matemático.

Observamos también en el fragmento de la clase un fenómeno didáctico conocido como la "ilusión de un repertorio común" (Fregona, 1995). Se da una doble ilusión: la de que el vocabulario es compartido entre la docente y los alumnos –el concepto de altura que tiene la docente y el de altura de los alumnos–, y que

10 Si invierte la escuadra, haciendo una reflexión, "aparecen" otros tres triángulos, pero la clase no lo advierte.

 ISSN 2422-5975, en línea

el uso cotidiano de la palabra va a consolidar su uso en matemática.

En años posteriores, la misma docente al abordar este contenido reemplaza la escuadra por un triángulo de papel, pero conserva la técnica de rotarlo para lograr una posición conveniente a su discurso tecnológico de altura. Esta variable es muy importante para la docente, ya que refuerza la idea de que la base es el lado en el cual se apoya el triángulo, recuperando una posición favorable al trazado que desliza la problemática geométrica hacia una problemática espacial (Salin, 2004). En una de las entrevistas afirma:

> Es uno de los temas más difíciles en sexto grado... ¡es muy abstracto! Y trabajar con el tema de las alturas en los triángulos obtusángulos... es tan difícil que uno de estos últimos años ya no lo dimos. Di altura de los triángulos equiláteros, de los isósceles... algunos acutángulos... pero triángulos obtusángulos no di nada... porque es tan abstracto para desplazar el lado... para trazar la altura que noooo... se hace muy complicado, se me van muchas clases y no pueden ver ellos, no les puedo dar yo la utilidad en el contexto de ellos para que apliquen. Yo lo recorto...

La docente en posición de enseñante, sin recursos para estudiar el discurso tecnológico que ofrece el libro, intenta generar la noción de altura recurriendo al uso social del término y determinando la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se producen interacciones con los alumnos a través de este recurso, con el fin de generar una aproximación a una técnica de construcción de las tres alturas de un triángulo acutángulo presentado como figura típica.

A modo de conclusiones

En el momento de la planificación, los docentes recurren al diseño curricular en busca de orientaciones para sus prácticas, pero este en algunas ocasiones se vuelve insuficiente; por ejemplo, al plantear tareas del tipo de copiado, se deberá resolver con qué modelos, en qué secuencia, con qué instrumentos, en qué tiempos, etc. En otras ocasiones, se vuelve un tanto impreciso: "estudio de propiedades", ¿cuáles?, ¿en qué orden?

La adopción de un libro de texto allana en parte estas incertidumbres, pero no las resuelve del todo. El estudio del libro y los registros de las observaciones de clases muestran ciertas recurrencias en el desarrollo de las secuencias de los distintos conceptos, pero en la lección de las alturas de los triángulos el libro empieza con una definición, y la docente debe acomodarse a esa situación. Y lo hace, tal como observamos, apelando al lenguaje cotidiano o social.

Creemos que abordar los elementos tecnológicos que se ofrecen en la sección "Machete" como objeto de estudio sería de gran utilidad para avanzar sobre el análisis de las características de las figuras. Estudiar, analizar e interrogar una definición permitiría interpretar clases de subclases; por ejemplo, que un cuadrado también es un rectángulo; o disminuir los errores de interpretación por la posición de una figura, como ocurre con sus alumnos, cuando aparecen dudas respecto de si "es" un triángulo o "se parece" a un triángulo. Como señalamos, los autores expresan en el libro del docente que las secciones "Machete" "están pensadas para que se lean de manera colectiva y sean fuente de consulta en diferentes oportunidades" (p. 16). En el caso de abordar el trabajo con las alturas de los triángulos, cuando el alumno todavía no estableció una relación con el objeto, ¿qué tareas serían las sugeridas para hacer efectivo el análisis de una definición? ¿Cuándo y cómo iniciar el discurso tecnológico sobre los triángulos? ¿Cuál es la razón de ser del estudio del objeto alturas de un triángulo en la escuela primaria?

Los niños, desde temprana edad, tienen una relación con los objetos geométricos que les permite tomar algunas decisiones, activarlos al abordar ciertas tareas, reconocerlos cuando están recortados o dibujados en ciertas condiciones, como es el caso de algunas figuras planas. Desde la escolaridad inicial identifican figuras y avanzan lentamente en el estudio de sus regularidades; sin embargo, en este recorrido escolar, ¿cuánto conocen de estos objetos? Cuando las figuras a trabajar no se corresponden con las figuras típicas que fueron presentadas, las identificaciones se hacen más difíciles; no obstante, no se suelen percibir las definiciones como necesarias para enriquecer la relación con ese objeto. ¿Qué tipo de definición de triángulo se podría incorporar como elemento tecnológico que facilite la identificación de esta clase de objetos en la escolaridad primaria? Como señalamos, aparecen en el libro definiciones de distintas figuras como cuadrados, rectángulos, rombos o circunferencia, pero no se ofrece una definición de triángulo. ¿Son los triángulos objetos matemáticos transparentes para los autores?

Consideramos que se necesita más investigación y trabajo en colaboración ante la magnitud de la problemática que se plantea: los discursos tecnológicos de los alumnos de segundo ciclo de escuela primaria fundados, genuinamente, como consecuencia de un proceso de estudio.

Agradecimiento

El presente trabajo fue realizado con el acompañamiento, apoyo y asesoramiento de la Dra. Dilma Fregona y del Mgtr. Aníbal Darío Giménez, a quienes deseamos expresar nuestra más profunda gratitud. Otro agradecimiento a la Lic. Erica Heitmann por brindar generosamente sus aulas y tiempos compartidos de lectura y reflexión.

Referencias

Broitman, C. y otros (2010). *Matemática en sexto. Libro del docente*. Buenos Aires: Santillana.

Chevallard, Y. (1991). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique.* Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l›Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y. (1999). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: l'approche anthropologique*. IUFM d'Aix-Marseille. Recuperado de: file:///D:/Bibliograf%C3%ADa%20p/Analyse_des_pratiques_enseignantes%20Y%20C.pdf

Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie; interactions, contrats et transpositions didactiques.* Tesis, Université Bordeaux I. Recuperado de: http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/93550

Gobierno de la Provincia de Córdoba. *Diseño Curricular de la Educación Primaria 2011-2020.* Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. Recuperado de: https://www.igualdadycalidadcba.gov.ar

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Ed. Trillas.

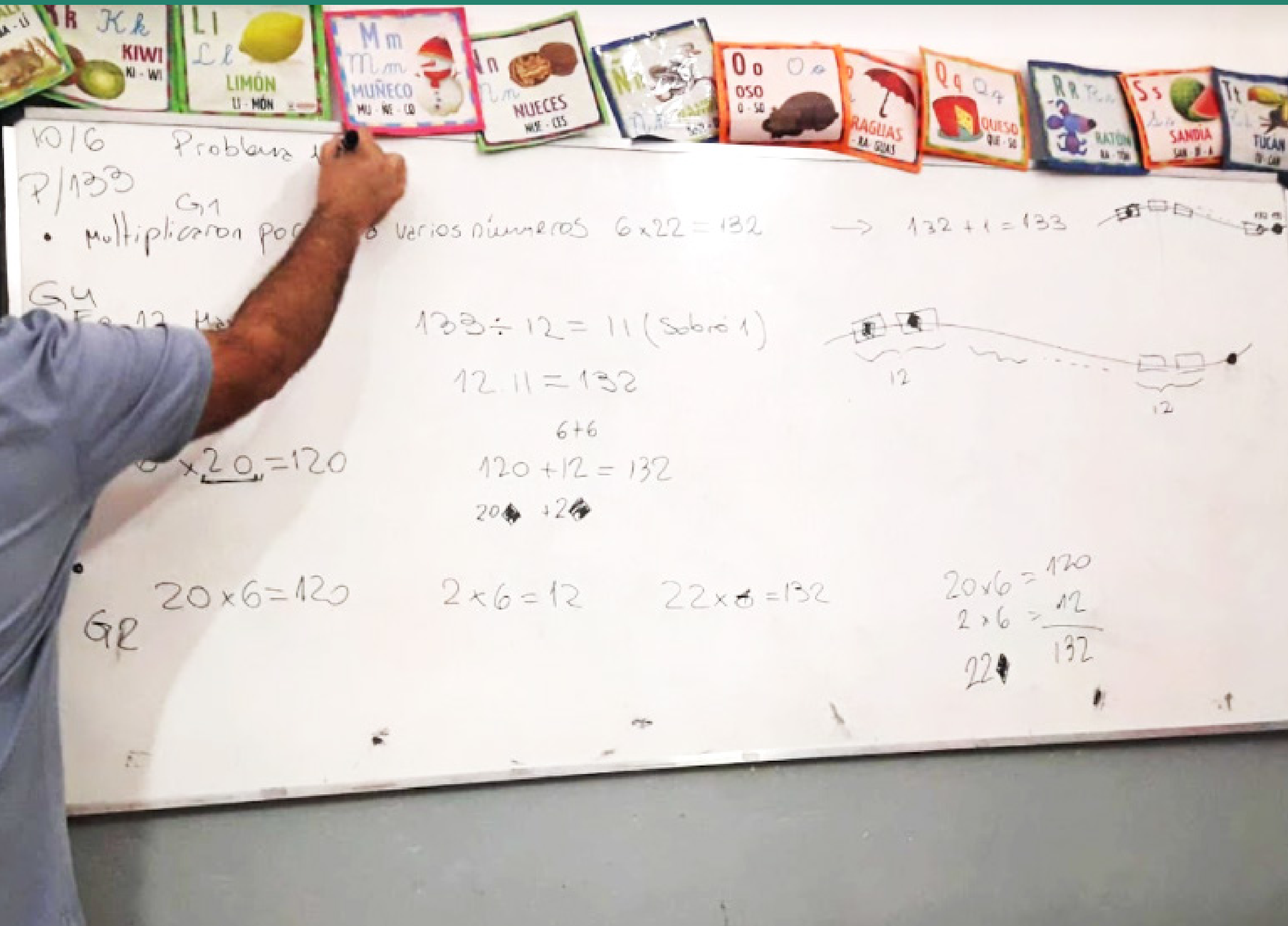
Porras, M. y Martínez, R. (1998). La geometría del plano en la escolaridad obligatoria. Algunas reflexiones acerca de su enseñanza. *Novedades Educativas*, Año 10, Número 87.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En J. López Ruiz (coord.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). España: Ministerio de Educación y Ciencia.

 ISSN 2422-5975, en línea

El valor mostrativo de las expresiones numéricas

Tensiones entre las escrituras de les estudiantes y las que ofrece el docente



Docente escribiendo en pizarra. Fotografía obtenida por los autores.

Valeria Borsani • Juan Pablo Luna
Carmen Sessa

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 **Julio 2021**

Valeria Borsani

Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática de la Universidad de Buenos Aires. Actualmente es profesora adjunta de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe). Integra el equipo de investigación que dirige Carmen Sessa en la Unipe. Previamente se desempeñó como profesora de Matemática en escuelas secundarias y en universidades de Buenos Aires, como formadora de maestros y profesores. Es co-autora de textos escolares y de diversos documentos y artículos referidos a la enseñanza de la matemática.

Juan Pablo Luna

Profesor de matemática por la Universidad de Buenos Aires y está cursando la Maestría en Formación Docente en la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe). Con un cargo de Jefe de Trabajos Prácticos en la Unipe, desempeña tareas de docencia en la Especialización y la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. Integra el equipo de investigación que dirige Carmen Sessa en la Unipe. Se desempeñó como docente de escuelas secundarias hasta el 2019, llevó adelante diversas tareas en espacio de formación docente, elaboró materiales de apoyo para la enseñanza y artículos de investigación.

Carmen Sessa

De formación inicial en Matemática, comenzó a estudiar Didáctica de la Matemática en 1991 con Patricia Sadovsky y Mabel Panizza. Actualmente es profesora titular en la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe), donde dirige la Carrera de Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. Es también docente en la Carrera de Profesorado en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas – UBA. Desde 2008, integra un grupo colaborativo de investigación, que incluye a investigadores y docentes: el Grupo de los Lunes. Los focos de interés en investigación han sido el álgebra y las funciones con la incorporación de la computadora. Es autora o coautora de libros de texto, libros para docentes y artículos de investigación.

El valor mostrativo de las expresiones numéricas

tensiones entre las escrituras de les estudiantes y las que ofrece el docente

The exhibiting value of numerical expressions: tensions between students' and teachers' writings

Valeria Borsani *

Juan Pablo Luna **

Carmen Sessa ***

Fecha de recepción: 9 de Abril 2021
Fecha de aceptación: 19 de Mayo 2021

RESUMEN

En una investigación colaborativa entre docentes de escuela secundaria y docentes investigadores universitaries[1], nos propusimos diseñar y estudiar un trayecto para el primer año de la escuela secundaria que permitiera un tejido entre las experiencias aritméticas de les estudiantes y las prácticas algebraicas en las que se les quiere involucrar. En el contexto de la divisibilidad, comenzamos proponiendo un trayecto que tiene por objetivo introducir a les estudiantes en un tipo de tratamiento algebraico de expresiones numéricas que incluyen varias operaciones. El núcleo central de este artículo es el análisis de ciertos episodios recortados a partir de lo acontecido en un aula cuando les estudiantes resuelven el primer problema de la secuencia. Nuestro estudio permite entender que ese objetivo necesita un recorrido que contemple tanto el inevitable aporte de le docente ofreciendo escrituras como la discusión colectiva en el aula en torno a ellas.

palabras clave

transición aritmética-algebra · expresiones numéricas interacciones en el aula

Contactos

*valeria.borsani@unipe.edu.ar ; **juan.luna@unipe.edu.ar ; ***carmen.sessa@unipe.edu.ar

1 Teniendo en cuenta el momento histórico que estamos viviendo, elegimos utilizar en nuestro escrito la "e", no simplemente para reemplazar a otras letras, sino como posición política desde la que queremos visibilizar géneros que de otra manera no estarían incluidos.

ABSTRACT

Within a collaborative research among secondary school teachers and university teachers-researchers, we laid out and tracked an educational itinerary for the first year of secondary school that would allow the articulation between students' arithmetic experiences and the algebraic practices they are expected to get involved in. In the context of divisibility, we began by proposing an itinerary that aims to introduce students to a type of algebraic treatment of numerical expressions including several operations. The central core of this article is the analysis of certain episodes selected among the events that took place in a classroom while students were solving the sequence's first problem. Our research allows for the conclusion that such a goal requires an itinerary that includes both the unavoidable contribution of the teacher offering their particular writings as well as the classroom collective discussion around them.

keywords

arithmetic-algebra transition · numerical expressions
classroom interactions

Introducción

El desarrollo del álgebra escolar ha sido y es un tema de indagación recurrente en el campo de investigación en Educación Matemática, como demuestran varios números especiales en revistas (por ejemplo, Coulange, Drouhard, Dorier y Robert, 2012) y diversos surveys (visiones de conjunto) que sintetizan diferentes estudios internacionales referidos a esta temática (ver, por ejemplo, Kieran, Pang, Schifter y Ng, 2016; Stacey, Chick y Kendal, 2004; Socas, 2011). En nuestro país, desde fines del siglo XX, varias investigaciones abordan aspectos de esta problemática (Cambriglia, 2018; Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996, 1999; Sadovsky, 2004).

Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) sostienen que, si bien "se ha avanzado mucho en la caracterización del álgebra escolar, el problema no está completamente resuelto, particularmente en lo que se refiere a la conexión entre el álgebra en Primaria y Secundaria" (p. 3). La tesis de Sadovsky (2004) se ubica en este espacio, considerando la producción en un aula del último año de la escuela primaria, cuando les estudiantes enfrentan actividades que suponen algún grado de ruptura con las prácticas tradicionales aritméticas. Nuestra investigación recoge también la inquietud de Godino et al. (2015) y se propone estudiar condiciones para un "tejido" entre las prácticas aritméticas y algebraicas.[2] Más precisamente, nos proponemos estudiar –en un grupo colaborativo que reúne a profesores de escuela secundaria y docentes/investigadores de la Universidad Pedagógica Nacional– las posibilidades y potencialidades de un tipo de trabajo algebraico, al inicio de la escuela secundaria, que recupere prácticas aritméticas de les estudiantes en su tránsito por la escuela primaria y permita poner en juego modos de abordaje

2 En el marco del proyecto de la Universidad Pedagógica Nacional, Picto 2017-0024. "Las expresiones algebraicas como generalización de los cálculos aritméticos: una posible entrada al álgebra en la escuela secundaria. Investigación colaborativa de diseño y análisis".

propios del experto en álgebra.[3] Asumimos la necesidad de enfrentar a les estudiantes con estas nuevas prácticas aun antes del primer contacto con las expresiones algebraicas.

"Nos proponemos estudiar las posibilidades y potencialidades de un tipo de trabajo algebraico, al inicio de la escuela secundaria, que recupere prácticas aritméticas de les estudiantes en su tránsito por la escuela primaria y permita poner en juego modos de abordaje propios del experto en álgebra."

Con ese objetivo, en una primera etapa de la investigación, hemos diseñado y llevado al aula una secuencia de actividades que se ubican en la zona del tratamiento algebraico de lo numérico e involucran a les estudiantes en un trabajo con expresiones numéricas que incluyen varias operaciones.[4] No esperábamos que la producción de este tipo de expresiones surgiera como respuesta a un tarea dada y, desde el diseño de la propuesta, asumimos la necesidad de pensar en intervenciones docentes que las ofrezcan. Aquí abordaremos la complejidad y la riqueza de los intercambios colectivos en torno a estas escrituras.

3 Un fundamento de este trayecto puede leerse en Borsani y Sessa (2020).

4 Para una segunda etapa de la investigación, hemos diseñado una continuación de la secuencia con actividades que incluyen el estudio de condiciones de validez de enunciados que contienen expresiones con variables (Sackur, Drouhard, Maurel y Pécal, 1997).

El núcleo central de este artículo es el análisis de ciertos episodios en el aula que revelan el necesario carácter colectivo del proceso de apropiación de estas nuevas escrituras por parte de les estudiantes.

"El núcleo central de este artículo es el análisis de ciertos episodios en el aula que revelan el necesario carácter colectivo del proceso de apropiación de estas nuevas escrituras por parte de les estudiantes."

Elementos teóricos que enmarcan nuestro trabajo

Diferentes investigaciones (Vergnaud, Cortés y Favre-Artigue, 1988; Chevallard, 1984; Sadovsky, 2004; Godino et al., 2015; Grugeon-Allys y Pilet, 2017) que toman como objeto de estudio las entradas al álgebra han puesto en evidencia que el pensamiento algebraico se construye con apoyo en el pensamiento aritmético y, al mismo tiempo, con importantes marcas de rupturas con él.

En un texto fundante, Chevallard (1984) señaló que existe una dialéctica en el corazón de la aritmética que se remonta a una distinción hecha por los griegos: la aritmética logística, de los calculadores, y la aritmética "propia de los filósofos". La primera, denominada también aritmética práctica, tiene por objeto la realización de operaciones y está regida por el principio de finalización del cálculo. La segunda se ocupa del estudio de propiedades de los números y las operaciones (teoría de números) y está organizada a partir de la conservación de la traza de las operaciones efectuadas. Mientras que la aritmética práctica utiliza el lenguaje numérico por su poder designativo, la aritmética "algebraica", por el contrario, aprovecha el valor *mostrativo* de las escrituras, que constituye la característica esencial del lenguaje algebraico. Es así como, en el corazón mismo del lenguaje numérico, existe una tensión entre dos modos de funcionamiento.

Nuestra investigación se ubica en la búsqueda de condiciones para involucrar a les estudiantes en un tratamiento algebraico de lo numérico como vía de entrada al trabajo algebraico.

Más recientemente, Arcavi, Drijver y Stacey (2017) señalan que "una fuerte comprensión de los números y la aritmética es fundamental para aprender álgebra, pero la transición hacia el álgebra requiere considerables reorientaciones de ideas" (p. 49, la traducción es nuestra). Por ejemplo, estos autores subrayan que en el álgebra se opera con los signos > = <, que son muy familiares para les estudiantes desde sus primeras prácticas aritméticas y cuyo nuevo uso incluye "sutilezas"/"subtítulos" que no siempre se explicitan al trabajar en álgebra. En particular, en las prácticas aritméticas, el signo igual se suele interpretar como el anuncio de un resultado. Esta forma de comprender el signo igual puede resultar inapropiada para el álgebra, ya que, al trabajar también con asuntos estructurales de los números y las operaciones, es necesario interpretarlo de una manera relacional, como la afirmación de una igualdad. Estas ideas resultan fundamentales como marco para nuestras indagaciones, que parten de asumir la posibilidad y fertilidad de que les alumnes construyan la idea de equivalencia de expresiones numéricas como un modo de otorgar otro sentido a la igualdad, aun en el campo de la aritmética.

La consideración de la igualdad como relación de equivalencia es una de las ideas que Squalli considera para caracterizar el pensamiento algebraico que, como él señala, puede ser movilizado sin hacer uso del lenguaje simbólico algebraico:

> (...) el pensamiento algebraico se despliega por medio de un conjunto de razonamientos particulares y de modos de acercarse a los conceptos en juego en las actividades algebraicas, por ejemplo, una tendencia a ver la igualdad como una relación de equivalencia, una tendencia a dejar las operaciones en suspenso, una tendencia a simbolizar y a operar sobre los símbolos, una tendencia a tener una visión estructural (ver, por ejemplo, una expresión numérica como un objeto en sí y no únicamente como una cadena de cálculo). (Squalli, 2015, p. 347; la traducción es nuestra)

En consonancia con estas ideas, sostenemos que las actividades que no involucran un lenguaje algebraico pero que enfatizan una mirada sobre la estructura del cálculo ofrecen a les estudiantes experiencias algebraicas mediante el trabajo con expresiones numéricas; en ese sentido, ayudan a construir "puentes" desde la aritmética hacia el álgebra. Es esta vía la que exploramos en nuestra investigación.

Sackur, Drouhard, Maurel y Pécal (1997) retoman la distinción establecida por Frege (1892, 1971) entre sentido y denotación de una expresión algebraica. Estos autores sostienen que modificar el sentido conservando la denotación de las expresiones y de las ecuaciones es una de las características fundamentales del trabajo con el lenguaje algebraico y es lo que le otorga su potencia. Nos interesa señalar que el lenguaje algebraico –gracias a lo que Chevallard (1984) denomina el valor *mostrativo* de las escrituras– ofrece la posibilidad de producir información a partir de la lectura de una expresión; el núcleo central del trabajo algebraico estaría dado por la búsqueda de informaciones diferentes que se logran modificando la escritura de los objetos y conservando su denotación.

Arcavi (2005) destaca que la habilidad de manipular y también de "leer a través" de expresiones simbólicas es un componente fundamental de un "sentido del símbolo".

En un texto precedente (Arcavi, 1994), el autor realiza una descripción y discusión de "conductas" prototípicas que él presenta como ejemplos de "tener sentido del símbolo". Nos interesamos en lo que él llama "Manipulaciones y más allá: la lectura a través de los símbolos" y, particularmente, en dos aspectos específicos de la relación entre leer y manipular:

- leer en lugar de manipular;
- manipular para leer, o la lectura como objetivo de las transformaciones.

Nos interesa resaltar el vínculo estrecho entre la posibilidad de modificar el sentido de las escrituras algebraicas conservando su denotación (Sackur et al., 1997) y las conductas "leer en lugar de manipular" y "manipular para leer" (Arcavi, 1994). Si bien los autores desarrollan estas ideas referidas al trabajo con expresiones algebraicas, retenemos su potencial para nuestro estudio de actividades que implican un tratamiento algebraico de expresiones numéricas.

Arcavi et al. (2017), en un intento de caracterizar "qué es lo que hacemos en realidad cuando hacemos álgebra", introducen también la acción de desimbolizar, que consiste en la inspección de una expresión algebraica con el objetivo de extraer información de ella. En el ejemplo que ellos proponen, a partir de una expresión algebraica que se presenta como modelo de una situación extramatemática, se trata de inspeccionarla para reconstruir su sentido –de cada uno de los elementos y de las operaciones que la componen– en términos de la situación que está modelizando. Retenemos esta idea para el estudio que proponemos en este artículo.

Acerca del problema que resolvieron les estudiantes

Como dijimos en la introducción, hemos diseñado una propuesta de enseñanza que tiene el propósito de introducir a les estudiantes en la práctica de la lectura de información de expresiones numéricas que combinan varias operaciones. La divisibilidad entre números naturales es la zona del currículum en la cual se ubican las diferentes actividades que llevamos al aula. Por ejemplo, en el problema 7 de la secuencia se pide a les estudiantes que decidan, sin hacer la cuenta, si expresiones numéricas como 22x35, 10x42+42, 6x55+10 o 5x13+6x13 son múltiplos de 11. Para poder leer la información pertinente, en algunos casos será necesario transformar la escritura dada, conservando la equivalencia de las expresiones. En el primer problema de la secuencia –en el cual nos vamos a centrar en este artículo–, este tipo de expresiones numéricas no son necesarias para responder, pero estarán presentes en la instancia de la discusión colectiva.

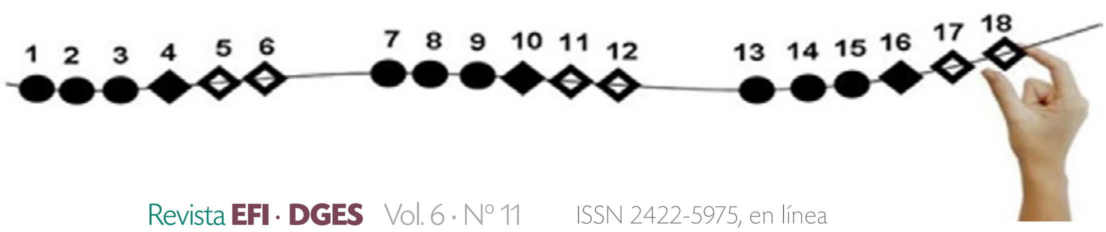
Problema 1

En un hilo se enhebran los siguientes tipos de mostacillas: 3 bolitas negras, 1 cubito negro y 2 cubitos blancos, repitiendo la secuencia que muestra la imagen. Los números que se encuentran arriba del collar indican el orden en el que fueron enhebradas las mostacillas. (Figura 1)

a) Armé un collar con 32 mostacillas siguiendo esta secuencia, ¿de qué tipo será la última mostacilla? ¿Y si el collar tiene 622 mostacillas?

b) Si se quiere armar un collar con 133 mostacillas, ¿cuántos cubitos negros se necesitan? Escriban cómo lo pensaron. Y si se arma uno con 239 mostacillas, ¿cuántos cubitos negros se necesitan? Escriban cómo lo pensaron.

Figura 1



El ítem a) apunta a la identificación de la regularidad del diseño del collar cada 6 mostacillas. Si bien es posible abordar la cantidad 32 desde el conteo sobre un dibujo ampliado del collar, el número 622 obliga a pensar en estrategias de cálculo: avanzar de a seis o múltiplos de seis hasta llegar a un número cercano al 622, o apelar a la división entera de 622 por 6 y utilizar el resto para caracterizar la mostacilla final.

El ítem b) introduce novedades respecto del anterior, ya que, si se buscan múltiplos de 6 cercanos al 133 o al 239, será necesario conocer el factor que multiplica al 6. La escritura de las cuentas intermedias en un procedimiento se constituye en un apoyo necesario para recuperar la cantidad de grupos de 6 que entran en el número de mostacillas en estudio y para analizar si la cantidad de mostacillas restantes agrega o no un cubito negro. En caso de que se apoyen en la división entera, tanto el cociente como el resto son necesarios para producir la respuesta.

En el primer día de trabajo, les estudiantes llegaron a resolver el ítem b) y produjeron escritos grupalmente que contenían cuentas y explicaciones en lenguaje coloquial de las ideas puestas en juego. Como era esperable, les estudiantes no produjeron autónomamente escrituras de un cálculo como síntesis de las cuentas realizadas. La clase finalizó en ese momento y el docente recogió estos escritos.

En este artículo, centraremos nuestra mirada en las discusiones que tuvieron lugar en la segunda clase, en torno a esas resoluciones del ítem b).

La nueva tarea que propone el docente para trabajar con las producciones de les estudiantes

Como ya dijimos, nuestra propuesta tiene el propósito de introducir a les estudiantes en la práctica de la lectura de información de expresiones numéricas que combinan varias operaciones. Eso comienza a desplegarse en el problema siguiente de la secuencia:

Problema 2

Sin obtener el resultado de la cuenta, decidir si los siguientes números son múltiplos de 6. Expliquen sus respuestas.

120 + 600   125 + 600   72 + 18
72 + 186 + 12   1206 + 46

En este problema, se presentan expresiones algebraicas numéricas sin un contexto extramatemático. Les estudiantes tienen que interpretar esas escrituras y obtener información pertinente para responder la pregunta planteada.

Tal como habíamos anticipado, hay una gran distancia entre las producciones escritas de les estudiantes para el ítem b) del primer problema y aquellas escrituras que deberán abordar en el segundo.

Con el objetivo de tender puentes hacia el trabajo que les esperaba, finalizada la clase 1 y a partir del análisis de las producciones de sus estudiantes, el docente elabora una actividad particular para organizar la discusión colectiva del ítem b) del Problema 1: produce, entre clase y clase, diferentes escrituras de cálculos horizontales que reflejan, de algún modo, las estrategias desarrolladas por cada grupo. Las presenta de a una en el pizarrón y, en un primer momento, solicita a los grupos que la analicen para ver si reconocen en esa escritura la estrategia que utilizaron para responder (de algún modo, propone ese cálculo como representación resumida de la estrategia utilizada). En caso de que ese reconocimiento se produzca, planea dar la palabra a les productores, con el objeto de hacer públicas las relaciones e ideas que irían cargando de sentido a esa escritura. Sea o no reconocida por algún grupo, en un segundo momento va a proponer a toda la clase el análisis de esa escritura en relación con su eficacia y pertinencia para determinar la cantidad de cubitos negros presentes en cada collar (de 133 y 239 mostacillas). Con esta propuesta, el docente apunta a que se entienda y reconstruya colectivamente el sentido de la expresión en función de la pregunta que todes les chiques ya respondieron, quizás de modos bien diferentes.

Nos interesa señalar el papel del contexto tanto en la instancia de reconocimiento por parte del grupo productor como en el trabajo de toda la clase dotando de sentido a esa escritura. En particular, la construcción colectiva de ese sentido a la cual les estudiantes son convocades requiere reconstruir –a partir de la escritura simbólica– un procedimiento que involucra acciones enunciadas verbalmente en términos del contexto del problema (“sacar una mostacilla”, “saltar de a seis para repetir el tipo de mostacilla”). Entendemos que en esta búsqueda de sentido se estaría poniendo en juego un proceso de desimbolización (Arcavi et al., 2017). Esta noción, considerada por les autores como una de las acciones involucradas en el trabajo con expresiones algebraicas, nos resulta fértil para pensar el tratamiento de cálculos que combinan varias operaciones, en tanto expresiones simbólicas nuevas para muches chiques.

En el texto recién mencionado, les autores proponen como ejemplo de desimbolización la acción que desarrollan les estudiantes cuando, después de trabajar con actividades de producción de fórmulas para contar colecciones, se les presentan expresiones con variables para que elles las acepten o no como modelo de conteo de una cierta situación. Señalamos que, en ese caso, el proceso de desimbolización tiene como punto de apoyo el hecho de que les estudiantes fueron antes productores de expresiones similares, contrariamente a lo que ocurre en la tarea que estamos analizando ahora. La expresión a “desimbolizar” es producida por el docente tras escasa experiencia previa de les estudiantes con expresiones de este tipo.

En el Problema 2, las expresiones propuestas no se presentarán como respuesta a ninguna pregunta y, por eso mismo, no habrá una estrategia o procedimiento a reconstruir. Pensamos que el tratamiento de las escrituras que propone el docente como cierre del Problema 1 –muy mediado por el contexto, que ofrece palabras– va a permitir un abordaje del siguiente problema enriquecido con la experiencia de haber discutido sobre ellas.

En lo que sigue de este artículo analizaremos las discusiones que tienen lugar en el aula a propósito de las dos primeras escrituras que propone el docente y la totalidad –y complejidad– del texto que queda plasmado en el pizarrón al finalizar la clase.

Algunos recortes de lo acontecido en el aula

Episodio 1

Nos ubicamos en el momento en que les estudiantes van a comenzar a trabajar con las respuestas que elles habían producido para la segunda pregunta del ítem b) del Problema 1: ¿cuántas cubitos negros se necesitan para armar un collar de 239 mostacillas?

El profesor explica la consigna de trabajo y escribe un primer cálculo en el pizarrón: 6x40=240. Como se verá, refiere a la producción del grupo 1 *(ver Figura 1)*.

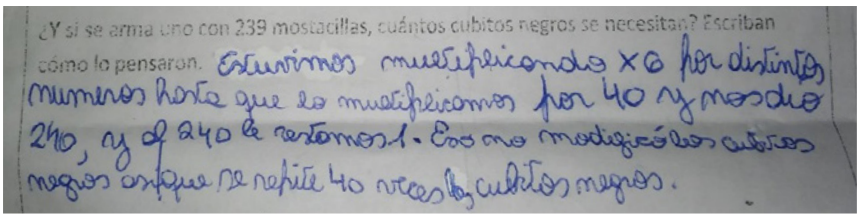


Figura 1. *Producción del grupo 1*

Detengámonos a analizar esta producción. El contexto del problema, el dibujo del collar que se presenta y las discusiones que se hicieron con las preguntas anteriores llevan a este grupo a considerar grupos/saltos de 6 mostacillas. En este ítem se pregunta por 239 mostacillas. Es interesante notar que en la respuesta que arman estas chicas, no aparece escrito el número 239. Ese número no es utilizado para hacer ninguna cuenta, aunque está implícito en la producción escrita tanto para controlar qué multiplicación por 6 les sirve (buscan aproximarse al 239) como para justificar, implícitamente, la última acción realizada ("a 240 le restamos 1"). La primera oración es un relato que tiene las marcas de las acciones que realizaron (en pasado) en el momento de exploración. No sabemos si las cuentas intermedias fueron escritas, pero probablemente no las consideran importantes como parte de la respuesta. Notemos que aun la cuenta final "40x6" es relatada usando palabras –obedeciendo seguramente a cuestiones de contrato– ante el pedido de "Escriban cómo lo pensaron".

Cuando el profesor escribe la cuenta "6x40=240" se hace un silencio, nadie la toma como propia, posiblemente muches chiques todavía no entienden bien qué tienen que hacer. El siguiente fragmento reproduce las interacciones en la clase a partir de ese momento.

> 1-Profesor (P): Alguien puso lo mismo, "fuimos multiplicando a 6 y sirvió 6x40", ¿qué grupo hizo 6x40?
>
> 2-Alumne (A) (del grupo 2): Nosotros.
>
> 3-A (del grupo 1): Nosotros.
>
> 4-P: ¿Ustedes lo hicieron? ¿Grupo 1? Bueno, ahora vemos si es esta. Hicieron 6x40 y les dio 240, pero ahí me paso de 239, ¿qué hicieron?
>
> 5- A (del grupo 1): Le restamos 1.
>
> 6- P: 240–1... 239 (mientras expresa esto, el profesor va escribiendo "240–1=239", ver Figura 2). ¿De qué me sirve restarle ese 1? ¿De qué me sirve identificar ese 1?
>
> 7- A (del grupo 1): Para que te dé la cuenta, porque como se pasaba, necesitaba...
>
> (hablan varios juntos).
>
> 8- P: De a uno. A ver allá, ¿ustedes hicieron algo parecido o no? (Les pregunta a las chicas del grupo 3).
>
> 9- A (del grupo 3): No.
>
> 10- P: Bueno, ¿pero por qué piensan que me sirve restarle ese 1? La cuenta me va a dar 239, ya sé que 240–1 me da 239.
>
> 11- A (del grupo 3): Porque una mostacilla que saques no hace daño.
>
> 12- A (del grupo 4): O que sobre.
>
> 13- P: ¿Por qué no hace daño? (varios alumnos hablan a la vez). De a uno...
>
> 14- A (del grupo 3): Porque no va a sacar al cubito negro.
>
> 15- A (del grupo 4): Porque no es un cubito negro. Si fuera un cubito negro...
>
> 16- P: Bien, porque no es un cubito negro. Si fuera negro, lo tengo que contar, ¿está? Bien, y entonces, de lo que escribieron, ¿en dónde veo el número que me dice la respuesta?
>
> 17- A (del grupo 1): Del 40.
>
> 18- P: De 40 porque estoy multiplicando 6. Es la misma idea que antes (se refiere a la discusión que habían tenido acerca de la primera pregunta del problema): por cada 6 tengo 1. ¿Está?
>
> 19- A: Ok.

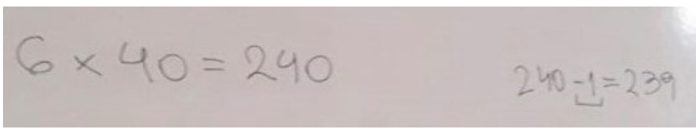


Figura 2. *Escritura que resulta en el pizarrón a partir de la línea 6 del fragmento.*

La escritura que resulta en el pizarrón (ver Figura 2), a partir de la producción del grupo 1, se forma entonces en dos instancias. La primera (6x40=240) la ofrece el profesor y agrega oralmente información: "fuimos multiplicando por 6 y vimos que 6x40 servía". Estas palabras remiten a una acción que el grupo desplegó antes de llegar a la operación que queda expresada en la cuenta del pizarrón. Pensamos que, de esta manera, el profesor trata de ayudar al grupo productor a que se reconozca y así iniciar la discusión colectiva sobre ese cálculo. El grupo productor tiene dos elementos para reconocerse: los dichos del profesor y la escritura que él propone en el pizarrón. Entendemos que esta distinción entre lo que él decide escribir y lo que decide decir ayudará a que les estudiantes vayan construyendo la idea de que hay escrituras que permiten condensar la información necesaria para responder a lo que se pregunta. Es desde lo oral que agrega una temporalidad, al relatar cómo llegaron a esa cuenta. Para les productores, esa cuenta es el punto de llegada de la búsqueda de múltiplos de 6 cercanos a 239. Mientras que, para el resto del curso, es un cálculo que puede o no guardar relación con las estrategias que cada grupo desplegó.

Luego de que el grupo 1 se reconoce en esa escritura, sus integrantes avanzan contando cuáles fueron sus siguientes acciones (línea 5), dando lugar al otro cálculo que escribe el profesor. Como puede verse en el resto del fragmento, el profesor convoca a todes a discutir sobre esta escritura y logra la participación de muches estudiantes. En la línea 6, la intervención del docente tiene por objetivo que les estudiantes relacionen el cálculo 240–1 con el conteo de mostacillas negras; sin embargo, hasta la línea 10, las afirmaciones de les estudiantes hacen referencia solamente a las cuentas realizadas. Recién en la línea 11, una alumna asocia la cuenta 240–1=239 a la idea de que "una mostacilla que saques no hace daño". El profesor, tomando el modo de decir de la estudiante, invita a que ella explique "por qué no hace daño". Se toma como compartido el significado de la expresión "no hace daño" como un modo de decir que no va a influir en la cantidad de cubitos negros que se tenían contados. La pregunta de este "por qué" del docente podría albergar explicaciones en dos planos diferentes:

- Por un lado, la explicación que une estudiante da en la línea 14: "no va a sacar al cubito negro" (probablemente evocando la acción de sacar la última mostacilla al collar de 240). En esta respuesta, queda implícito que entonces no cambiaría la cantidad de cubitos negros (cantidad que aún no se explicitó: recién en la línea 17, y ante una pregunta del docente, aparece la cantidad de mostacillas negras).
- Por otro lado, se podría dar un argumento de por qué la mostacilla 240 del collar no será un cubito negro: la mostacilla 240 cierra un "ciclo" de 6 y, entonces, mirar la mostacilla 240 es como mirar la mostacilla 6, que se sabe que es blanca. Por eso, quitar una "no hace daño", por eso no hay "riesgo" de sacar un cubito negro.

Entendemos que les estudiantes están teniendo en cuenta estos últimos argumentos, aunque no aparecen como contenidos explícitos de los intercambios que estamos analizando y no son requeridos por el profesor. Posiblemente porque ya fueron suficientemente expuestos y aceptados en el trabajo con el ítem a) y el primer número del ítem b). Por ejemplo, ya forma parte de los acuerdos de la clase que "si un collar tiene un número total de mostacillas múltiplo de 6, mirar la última es como mirar la mostacilla sexta", y que "en cada tira de 6 hay un cubito negro".

En las últimas líneas del fragmento, el profesor restituye la pregunta inicial invitando a buscar la respuesta entre los números escritos en el pizarrón, reforzando la idea de que la escritura de los dos cálculos contiene la información necesaria para responder la pregunta.

Las relaciones que identificamos, explicitadas o no en este diálogo entre estudiantes y docente, forman parte del proceso de dotar de sentido a las escrituras de los cálculos como modelo de la situación que se está estudiando y condensar en ellas, entre todas las ideas, estrategias y acciones desplegadas para resolver y comunicadas oralmente, las relaciones suficientes para dar respuesta al problema.

Nos interesa detenernos en el hecho de que el profesor elige no poner de entrada la escritura de la estrategia completa y, recién después de las interacciones con el grupo productor, agrega “240–1=239”. Recorre así la temporalidad de la estrategia del grupo, remitiendo al “paso a paso” característico del trabajo aritmético que les estudiantes traen de su experiencia en la escuela primaria. Entendemos que esta escritura secuenciada de dos cálculos es preliminar a una única expresión numérica que combine las dos operaciones, tal como las que aparecen en problemas posteriores de la secuencia. En sus primeras interacciones con tales escrituras, les estudiantes podrían asignarle una cierta temporalidad, ligada a acciones, como un modo de dotar de sentido a toda la expresión. Una temporalidad de la cual deberán desprenderse para ir avanzando en el trabajo algebraico.

Episodio 2

Hemos estado analizando las discusiones en el aula en torno a las dos primeras cuentas que el docente escribió en el pizarrón, reconocidas por las autoras. Algo muy diferente va a pasar con la segunda escritura que el docente propone, cuyo tratamiento en el aula será analizado en esta sección. Se trata, en este caso, de un cálculo que él produjo en relación con las respuestas de dos grupos.[4] Antes de detenernos en los diálogos que tienen lugar en la clase a partir de que el docente propone esa nueva escritura, comencemos analizando las producciones que esos dos grupos realizaron la clase anterior (ver Figuras 3 y 4).

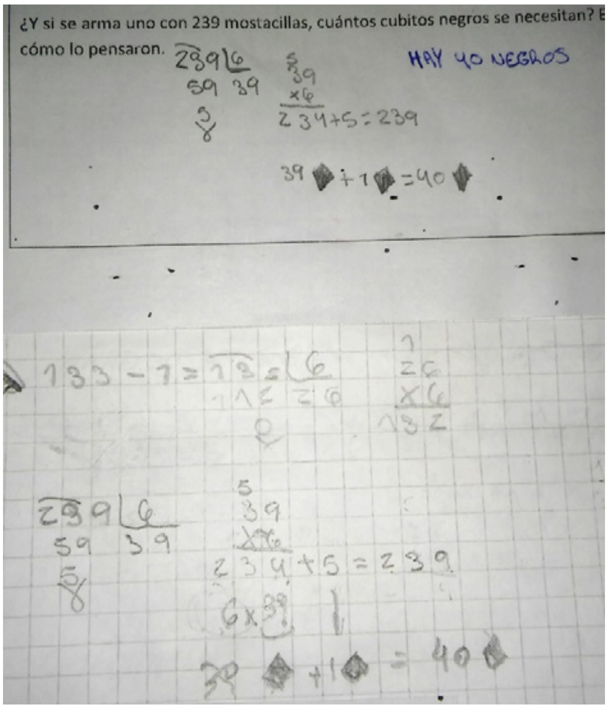


Figura 3. *Producción del grupo 2.*

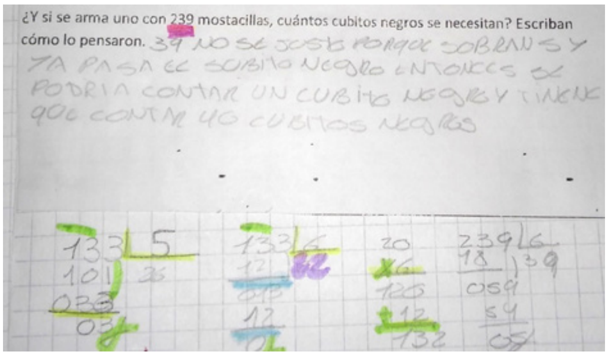


Figura 4. *Producción del grupo 3.*

Transcribimos el texto de la Figura 4: *39 no es justo porque sobran 5 y ya pasa el cubito negro entonces se podría contar un cubito negro y tiene que contar 40 cubitos negros.* De todas las cuentas que figuran más abajo, la última de la derecha es la que corresponde a la pregunta que estamos analizando.

Les estudiantes de estos dos grupos utilizaron la cuenta de dividir 239:6 para obtener

4 Esto fue confirmado en conversaciones posteriores con él.

la cantidad de "ciclos de 6" –o "tiras de 6"– contenidos en 239. Ambas producciones también muestran una comprensión de que las 5 unidades restantes aportan otro cubito negro.

Sin embargo, algo las distingue: mientras que el grupo 3 puede producir la respuesta a partir de los resultados que arroja la cuenta de dividir, el grupo 2, una vez obtenido el cociente 39, introduce la cuenta 39x6=234. Interpretamos que este último grupo necesita el resultado de la cuenta de multiplicar para poder expresar el 239 como un múltiplo de 6 más un número suficientemente pequeño para que no alcance a completar otra tira: la suma que escriben es "234+5=239". En el renglón siguiente, agregan la expresión "6x39" debajo del 234 y una flecha vertical que parte del 5 para recién después, en un renglón más abajo, contabilizar la cantidad de cubitos negros. Tal como habíamos anticipado al planificar esta actividad, les estudiantes no producen la escritura que combina los dos cálculos (239=6x39+5), expresión que podría haberse obtenido directamente de la cuenta de dividir. Pareciera que les estudiantes de este grupo –no así les del grupo 3– no atrapan totalmente la información que porta dicha cuenta, quizás insegures por la presencia de un resto que complejiza la relación entre los datos (dividendo y divisor) y los resultados (cociente y resto).

El siguiente fragmento reproduce las interacciones en la clase a partir del momento en que el docente escribe "39x6=234".

1-P (escribiendo): Otros hicieron esto: 39x6 y les dio 234. ¿Quién hizo esto? ¿Cuántos cubitos tengo hasta la mostacilla 234?

2- A (del grupo 1): 39.

3- P: 39, la misma idea que antes, ¿no? López, ¿se entiende? Por cada seis tengo una, multiplico por 39... (Como ve que el alumno asiente, continúa) Bárbaro... ¿Me faltan o me sobran?

4- A (del grupo 4): Me faltan 5, pero no sé si modifica.

5- P: ¿Me modifica ahora lo que falta?

(Alumnas del grupo 4 hablan entre ellas) ¿Cuántas faltan? ¿5? 1, 2, 3, 4, 5... sí, modifica.

(Alumnes del grupo 3 hablan entre elles) Sí, porque son 5 y en medio de esas 5 hay una mostacilla negra.

6- P: Tengo las 234. ¿Cuál es la última de las 234? ¿Qué mostacilla es la 234?

7- A (del grupo 3): Una blanca, creo.

8- A (del grupo 4): Blanca.

9- A (del grupo 4): Termina en un cubito blanco.

10- P: Me faltan 5, ¿no? ¿Esas 5 me modifican ahora?

11- Varies: Sí.

El docente agrega la cuenta "234+5=239".

12- A (del grupo 4): Sí, te modifica, porque se suma un cubito.

13- P: Pasa un cubito, ¿no?

14- A (del grupo 4): Pasás un cubito negro.

15- P: ¿Acá cuántos tengo? (señalando el 234 en el pizarrón) 39x6, o sea son 39 cubitos y acá (señalando el 5 que suma) tengo un cubito más, ¿no? (dibujando un cubito negro debajo del 5, ver Figura 5). Y ahí están los 40. ¿Está bien?

16- Varies: Sí.

17- P: Bueno algunos lo tenían más completo que otros en el grupo, pero ¿quién hizo esto? ¿Grupo...? (silencio) ¿Quién? De algún grupo lo saqué. Algo parecido, por ahí explicado con palabras, ¿no?

El silencio continúa, ningún grupo relaciona su producción con la escritura que propone el docente.

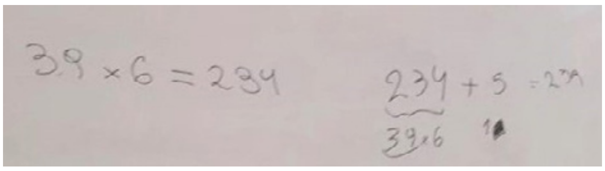


Figura 5. *Escritura del docente en el pizarrón.*

Hemos analizado que ambos grupos comenzaron la resolución con una cuenta de dividir y llegaron al número 39 como resultado de esa cuenta. En cambio, en la cuenta que propone inicialmente el docente (39x6=234), ese número aparece de entrada. El no reconocimiento por parte de les estudiantes nos advierte que el camino que llevaría de la cuenta de multiplicar a la de dividir –cuando se trata de una división con resto– necesita de relaciones que no necesariamente tienen disponibles les estudiantes (por ejemplo, entender que 39x6 es igual a 239 menos el resto que se obtiene al dividir 239 por 6).

Señalemos que el no reconocimiento de autoría para la escritura que el docente propone no impide que todes les chiques participen, coordinados por el docente, en la elaboración de una estrategia a partir del cálculo 39x6=234. Las interacciones orales llevan a la escritura de una segunda cuenta: 234+5=239. Y, en la intervención 15, el docente organiza el conteo de cubitos negros, agregando la expresión "39x6" y el dibujo de un rombo negro (ver Figura 5). La escritura completa viene a condensar nuevamente las relaciones necesarias para contestar la pregunta.

Destaquemos que las discusiones colectivas que tuvieron lugar movilizaron ideas que van construyendo un sentido compartido de las escrituras y una manera de responder la pregunta con la información que ellas portan. La estrategia que se configura se aleja posiblemente de aquellas que desplegaron los grupos 2 y 3 en su producción inicial, y esto explica el silencio que se obtiene a las preguntas del docente en la intervención 17.

La última intervención del docente ("De algún grupo lo saqué. Algo parecido, por ahí explicado con palabras, ¿no?") nos da pistas de que él intenta hacer visible el vínculo con la explicación producida por el grupo 3. Posiblemente, el docente identificó esta explicación con la estrategia multiplicativa del grupo 1: pensar multiplicaciones por 6 cercanas al 239 y luego ver si se modifica la cantidad de negras al ajustar sumando o restando algo.

Este episodio nos revela la complejidad de la nueva tarea que plantea el docente: entre las producciones de les estudiantes y las escrituras que él propone, se cuelan las interpretaciones que el propio docente hace de los escritos de les chiques y también las relaciones que él establece entre la multiplicación y la división, previsiblemente distantes de aquellas que, de manera diversa, están disponibles para les estudiantes.

"...entre las producciones de les estudiantes y las escrituras que él propone, se cuelan las interpretaciones que el propio docente hace de los escritos de les chiques y también las relaciones que él establece entre la multiplicación y la división, previsiblemente distantes de aquellas que, de manera diversa, están disponibles para les estudiantes."

Totalidad del pizarrón

Al finalizar la clase, el pizarrón recoge el trabajo de todos los grupos (Figura 6).

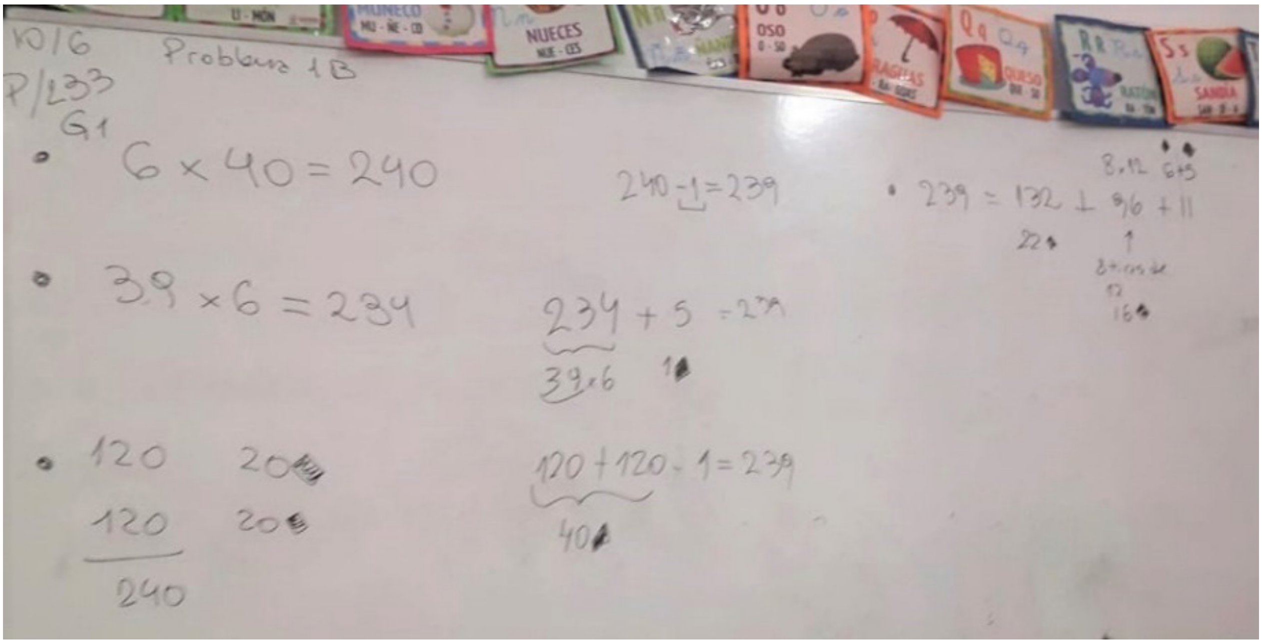


Figura 6. *Imagen del pizarrón al finalizar la clase.*

El trabajo de cada grupo, identificado con un punto, queda representado con uno o varios cálculos –si bien eran cinco grupos, como vimos antes, una de las escrituras propuestas por el docente se relaciona con las producciones de dos grupos–.

Las dos expresiones que aparecen arriba a la izquierda (correspondientes a tres grupos) son las primeras que se trabajan en el aula y ya han sido comentadas en este artículo. En cuanto a la tercera que aparece a la izquierda, recoge la manera de proceder de un grupo que se apoyó en un collar de 120 mostacillas para responder la primera pregunta del ítem b). Las multiplicaciones por 6 no aparecen explícitamente porque ya se sabía que en un collar de 120 mostacillas había 20 cubitos negros.

En estos tres casos, el procedimiento de cada grupo quedó representado por dos cuentas que atrapan todas las relaciones necesarias para responder. Notemos que, en la tercera producción, a diferencia de las dos primeras, la segunda cuenta (120+120–1=239) no muestra el resultado de la primera operación (240).

En la expresión que aparece arriba a la derecha del pizarrón, referida a la producción del grupo 5 y muy cercana a la escritura que presentaron sus autoras, todas las relaciones están atrapadas en una expresión, formada por una descomposición aditiva del 239 y escrituras auxiliares que aportan otras informaciones (en la Figura 7 reprodujimos ese sector del pizarrón).

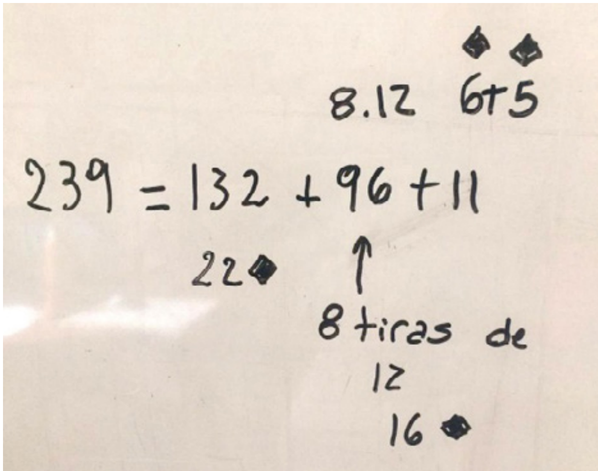


Figura 7. *Escritura en relación con la producción del grupo 5.*

Las estudiantes de este grupo se apoyaron en un collar de 132 mostacillas (analizado en la primera pregunta de este ítem) para luego estudiar la cantidad de cubitos negros presentes en el resto del collar. En el número restante (239–132), encontraron que hay 8 tiras de 12 mostacillas cada una y construyeron el 239 sumando 132+96+11. Notemos que el número 96 es el resultado de la multiplicación 8x12. Las autoras privilegian escribir el 96 en la descomposición aditiva del 239, lo cual hace necesario agregar, como cálculo auxiliar, "8x12" para computar la cantidad de cubitos negros presentes en ese sumando. Incluir ese cálculo como uno de los sumandos que reconstruyen el 239 podría no estar habilitado aún para estas estudiantes.

Para cada uno de estos cuatro procedimientos, el cálculo único que reuniría la información ya desplegada sería:

239=6x40–1

239=6x39+5

239=6x20+6x20–1

239=12x11+12x8+11

Este es el tipo de cálculo para estudiar cuestiones de divisibilidad que se presentará a les estudiantes en los próximos problemas y que será el soporte para, en el futuro, trabajar con expresiones algebraicas. Concebir que toda la información necesaria para responder quede condensada en una única expresión numérica que combine diferentes cálculos es algo que se irá construyendo en el trayecto de enseñanza que pensamos para estes estudiantes.

"Concebir que toda la información necesaria para responder quede condensada en una única expresión numérica que combine diferentes cálculos es algo que se irá construyendo en el trayecto de enseñanza que pensamos para estes estudiantes."

En relación con la acción del docente, entendemos una intención en el orden en que fueron proponiendo las escrituras: las dos primeras escrituras que se discutieron están conformadas por dos cálculos con una cierta temporalidad implícita, mientras que la última recupera en una sola expresión –y sus cálculos auxiliares– todas las cuentas involucradas en el procedimiento. Entre estas, podríamos decir que la tercera producción es una escritura "puente", ya que el cálculo "120+120–1" conserva la traza de la cuenta escrita a la izquierda sin retomar su resultado (240), haciendo innecesaria la primera suma. Gracias a esta progresividad en la complejidad de las escrituras propuestas por el docente, las relaciones construidas y las palabras dichas en torno a los primeros cálculos generan buenas condiciones para que más estudiantes de la clase lleguen a interpretar producciones escritas como la cuarta.

Señalemos además que, en un problema en contexto como este, para lograr que las cuentas reflejen ideas de un proceso de cálculo que da respuesta a una pregunta se requiere la inclusión de marcas del contexto en las escrituras. En nuestro ejemplo, quedaron escrituras "mixtas" –expresiones de cálculos y dibujos de mostacillas– en las cuales la cantidad de cubitos negros contabilizados era controlada por el contexto (el diseño particular del collar).

Finalmente, nos interesa destacar que, con el trabajo colectivo que se generó a partir de las producciones de todos los grupos, se termina construyendo un pizarrón en el que aparecen diferentes escrituras, composiciones y descomposiciones del número 239 que hacen visibles diferentes formas en las que se lo puede expresar, identificando múltiplos de 6 o de 12. Si bien no se menciona de manera explícita la idea de equivalencia de expresiones numéricas, esta noción está latente en el aula.

 ISSN 2422-5975, en línea

Reflexiones finales

Elegimos comenzar la secuencia con un problema en contexto, con el objetivo de que el estudio de diferentes descomposiciones de los números pudiera anclarse en las características de una situación particular. Pensábamos que, de este modo, los cálculos tendrían una finalidad relativa a la situación contextual. En particular, les estudiantes podrían disponer de palabras familiares para discutir en el espacio colectivo en torno a la relación entre las estrategias desplegadas por elles y cada escritura, dotando de significado a las diferentes componentes de un cálculo: factores o términos.

El análisis que hemos presentado de las producciones de tres grupos y de las discusiones que surgieron en el espacio colectivo a partir de la nueva tarea que propone el docente nos permite reafirmar el papel valioso del contexto: muchas expresiones de les estudiantes al referirse a las escrituras se vinculan con relaciones particulares que, en cada caso, se recortan del contexto. Las marcas icónicas (dibujos de cubitos negros) y las frases (por ejemplo "8 tiras de 12") que se van incorporando a las expresiones propuestas por el profesor permitieron reconstruir el modo en que se llegaba a la respuesta. Tanto las expresiones orales de les estudiantes como las marcas que se plasmaron en las escrituras dan cuenta del proceso de construcción de sentido con fuerte apoyo en el contexto.

"Tanto las expresiones orales de les estudiantes como las marcas que se plasmaron en las escrituras dan cuenta del proceso de construcción de sentido con fuerte apoyo en el contexto."

En relación con la tarea nueva que propone el docente, el análisis que hemos presentado pone de relieve su potencia para que les estudiantes vayan cargando de sentido a las escrituras de cálculos horizontales que combinan operaciones. En particular, en el punto 5.1 identificamos que, al presentar dos cálculos consecutivos, el docente respeta una temporalidad –propia de las experiencias aritméticas de sus estudiantes– que habrá que abandonar al trabajar en álgebra. De este modo, teje una transición entre esas experiencias y las nuevas prácticas algebraicas que están en el horizonte de su enseñanza.

Mirando en conjunto los Episodios 1 y 2 analizados anteriormente, destacamos que el par de cálculos que el profesor escribe en cada caso se va configurando para les estudiantes como un modelo de la situación en estudio y, al mismo tiempo, como portador de toda la información necesaria para responder.

En el tercer episodio, miramos la totalidad de un pizarrón que fue construido por el docente "progresivamente" en relación con la complejidad de las escrituras que presenta (desde los dos cálculos consecutivos que se van escribiendo en el primer y segundo ejemplo hasta la cuenta única que se presenta en el cuarto). Los intercambios entre el docente y les estudiantes relevados en los dos primeros episodios nos permiten reconocer que también existe una progresión en la complejidad de las ideas puestas en juego. El discurso que les estudiantes comparten en la clase –con el sostén del profesor– en torno a las primeras escrituras propuestas genera buenas condiciones para que más estudiantes de la clase lleguen a interpretar producciones escritas como la cuarta.

El Episodio 2 nos permite relevar también la complejidad de la actividad nueva que plantea el docente. Entre las producciones de les estudiantes y las escrituras que él propone se cuelan las interpretaciones que el propio docente hace de los escritos de les chiques y también las relaciones que él establece entre la multiplicación y la división, previsiblemente distantes de aquellas que, de manera diversa, están disponibles para les estudiantes.

En nuestra investigación nos propusimos diseñar y estudiar un trayecto que tiende puentes entre las experiencias aritméticas de les estudiantes y las prácticas algebraicas, coincidiendo con las preocupaciones de otres investigadores. Nuestro objetivo fue involucrar a les estudiantes en un tipo de práctica algebraica, a partir del trabajo con expresiones numéricas que incluyen varias operaciones. El problema en cuyo análisis nos hemos detenido en este artículo permite entender que este objetivo necesita un recorrido que contemple tanto el inevitable aporte del docente ofreciendo escrituras como la discusión colectiva en el aula en torno a ellas.

Referencias

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities.* Abingdon: Routledge.

Borsani V. y Sessa C. (2020). Le travail sur des calculs arithmétiques comme une voie d'entrée dans l'algèbre. En **H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner y M. Larguier** (coords.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (pp. 96-111). Quebec: CRIRES. Disponible en: https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-penseealgebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches.

Cambriglia, V. (2018). *Emergentes colectivos de generalización en la entrada al álgebra* (Tesis de Doctorado). Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Argentina.

Chevallard, Y. (1984). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique.*
Petit x, 5, 51-94.

Coulange, L., Drouhard, J. P., Dorier, J. L. y Robert, A. (coords.) (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

Grugeon-Allys, B. y Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130.

Kieran, C., Pang, S., Schifter, D. y Ng, S. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching.* Suiza: Springer.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). The first algebraic learning - The failure of success. Research report. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-Volume 4* (pp. 107-114). Valencia: International Group for the Psychology of Mathematics.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 453-451.

Sackur, C., Drouhard, J. P., Maurel, M. y Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire. *Repères IREM*, 28, 37-68.

Sadovsky, P. (2004). *Condiciones Didácticas para un Estudio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas* (Tesis de Doctorado). Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, Argentina.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. *Aportaciones de la investigación.* Números, 77, 5-34.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. En L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (pp. 346-356). Alger: Espace Mathématique Francophone.

Stacey, K., Chick, H. y Kendal, M. (2004). *The future of the Teaching and Learning of Algebra.* Berlín: Springer.

Vergnaud, G., Cortes, A. y Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. En G. Vergnaud, G. Brousseau y M. Hulin (dirs.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 259-279). Grenoble: La Pensée Sauvage.

La tarea de levantar paredes con ladrillo

Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico

Fotografía obtenida por el autor.

Aníbal Darío Giménez

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Aníbal Darío Giménez

Profesor de Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FAMAF), Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Magíster en investigación educativa con mención socioantropológica, Facultad de Ciencias Sociales (FCS – UNC). Docente del IPET 402. Docente del Profesorado en Educación Inicial, Escuela Normal Superior Alejandro Carbó y Profesor en Didáctica de la Matemática (FAMAF – UNC) Investigador del proyecto: "Estudiar prácticas de enseñanza y usos de la matemática destinados al trabajo docente" (SECyT - UNC). Miembro del Grupo de Educación Matemática perteneciente Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología (GECyT).

La tarea de levantar paredes de ladrillos

Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico

The task of raising walls with brick. An analysis from the anthropological theory of the didactic

Aníbal Darío Giménez *

Fecha de recepción: 13 de Abril 2021
Fecha de aceptación: 26 de Mayo 2021

RESUMEN

Esta publicación difunde las contribuciones de la tesis de Maestría en Investigación Educativa "Prácticas donde subyacen conocimientos matemáticos en grupos de albañiles en obras pequeñas", en la que reconstruí, desde un enfoque socioantropológico, distintas tareas de albañilería y los conocimientos matemáticos implicados en ellas. Para ello realicé una exploración de distintas áreas del abordaje teórico metodológico en donde se reconstruyen antecedentes y referentes teóricos de la didáctica de la Matemática.

En este escrito en particular, realizaré una descripción general de la tarea de levantar una pared de ladrillo visto, con la intención de capturar la complejidad de la tarea y de las técnicas utilizadas y analizar en profundidad la subtarea de colocación de las reglas, en la que se recuperan las explicaciones y justificaciones dadas por diferentes sujetos.

Finalmente, expongo algunas reflexiones respecto de la tarea descripta y analizada, y presento implicancias educativas. Al respecto, tomaré, dentro de la Formación Técnico Profesional, la orientación de Maestro Mayor de Obras (MMO) en la que me interesa analizar la ampliación de la formación tecnológica (en el sentido de la teoría antropológica de lo didáctico) para ampliar el contexto de aplicación de las técnicas dominadas y dar un mayor alcance a la técnica conocida (Chevallard, 1997).

palabras clave

albañilería · matemática · teoría antropológica de lo didáctico

Contactos

* dariogimenezcba@gmail.com

ABSTRACT

This publication disseminates the contributions of a Master's thesis in Educational Research "Practices where mathematical knowledge lies in groups of masons in small works", in which different masonry tasks are approached from a socio-anthropological approach. For this, an exploration of different areas of the theoretical-methodological approach is carried out, where antecedents and their contributions are reconstructed, and the theoretical references of mathematics didactics.

In this particular writing, I will carry out an overview of the task of erecting an exposed brick wall, with the intention of capturing the complexity of the task and the techniques used and analyzing in depth the subtask of placing the rules, in the that the explanations and justifications given by different subjects are recovered.

Finally, I present some reflections regarding the task described and analyzed, and I present educational implications. In this regard, I will take, within the Professional Technical Training, the orientation of Master of Works (MMO) in which I am interested in analyzing the expansion of technological training (in the sense of the anthropological theory of didactics) to broaden the context of application of the mastered techniques and to give a greater scope to the known technique (Chevallard, 1997).

keywords

masonry · mathematics · anthropological theory of didactics

Introducción

Este escrito difunde las contribuciones de una tesis de Maestría en Investigación Educativa llamada "Prácticas donde subyacen conocimientos matemáticos en grupos de albañiles en obras pequeñas",[1] que fue realizada en el marco de diversos proyectos de investigación.[2]

La problemática general que sigue vigente en estos proyectos de investigación es explorar las herramientas para enseñar o aprender determinados objetos matemáticos en condiciones singulares y los procesos que involucran las matemáticas en diferentes instituciones, procesos reconocidos por la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Una de las dimensiones del proyecto de investigación vigente, iniciado en el año 2018, es la indagación de procesos de utilización de la matemática en ámbitos no escolares.

En la tesis de Maestría, reconstruyo las trayectorias laborales de los sujetos con el fin de entender los modos de justificación, de comunicación y las preocupaciones frente a

1 Tesis de Maestría en Investigación Educativa con mención socioantropológica, Centro de Estudios Avanzados, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Defendida en el año 2018. Dirigida por la Dra. María Fernanda Delprato y codirigida por la Dra. Dilma Fregona.

2 Proyecto de investigación "Estudiar prácticas de enseñanza y usos de la matemática destinados al trabajo docente" (SECyT, UNC, 472/18) e inscripto anteriormente en "Estudiar y documentar prácticas de enseñanza y usos de la matemática para la formación de docentes" (SECyT, UNC, 1565/14), "Estudiar prácticas de enseñanza y usos de la matemática destinados al trabajo docente" (SECyT, UNC, Aval Académico 202/16, Subsidio 3338/16).

la resolución de las distintas tareas, deteniéndome en las peculiaridades de sus formas de transmisión y apropiación.

Realizo una descripción general de dos tareas, la de colocar pisos cerámicos y de levantar una pared de ladrillo visto, con la intención de capturar su complejidad y las técnicas utilizadas, así como un análisis en profundidad de distintas subtareas. En la tarea de colocar pisos cerámicos analicé la determinación de un punto estratégico, y en la tarea de levantar una pared de ladrillo visto analicé la colocación de las reglas y la colocación de ladrillos, en las que se recuperan las explicaciones y justificaciones dadas por diferentes sujetos.

Para este escrito en particular, haré una descripción general de la tarea de levantar paredes de ladrillo vistos, deteniéndome particularmente en la colocación de reglas, acción clave, ya que determina los niveles verticales y horizontales de las hileras de ladrillos, fundamentales para la realización de dicha tarea. Para la descripción y el análisis de la tarea, tomaré como referencia la TAD, en particular el concepto de praxeología. Finalmente, brindaré algunas posibles discusiones sobre las contribuciones al campo de la Educación Técnica que surgen de esta tesis.

Perspectivas teórico-metodológicas

La TAD, con la mirada sobre el nacimiento y la modificación de las relaciones de un sujeto con un objeto,[3] posibilita que el concepto de praxeología a través de las nociones claves de tarea, *técnica, tecnología y teoría*[4] sean pertinentes para estudiar cómo el sujeto "activa" al objeto en contextos muy diferentes (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Asumiendo las *lógicas complejas dialécticas* (Achilli, 2005) en las cuales no se desvinculan las concepciones empíricas y teóricas, en el devenir del trabajo de campo y el análisis fui advirtiendo que las tareas observadas requerirían distintos enfoques teóricos provenientes de distintos campos de producción:

> [Dichas lógicas] parten de concebir el mundo social como complejo, contradictorio y en permanente movimiento. Reconocer tal complejidad supone relacionar distintos niveles y órdenes de mediaciones en los procesos sociales [...].
>
> [...] una lógica de investigación que, coherentemente, se despliegue en un proceso dialéctico en el que no se disocien las concepciones teóricas y empíricas en la generación de conocimientos. Una lógica que, a su vez, contiene una reflexividad crítica de auto objetivación del mismo proceso en sí. (Achilli, 2005, p. 39)

En el marco del proyecto de investigación antes mencionado, algunos hallazgos han aportado a las discusiones que se plantean en este trabajo. He tomado avances de las distintas líneas de indagación del proyecto de investigación a partir de la inclusión de la TAD para la caracterización de praxeologías a partir de tareas de albañilería.

La TAD caracteriza lo didáctico como todo lo referente al estudio:

> Hablaremos de procesos didácticos cada vez que alguien se vea llevado a estudiar algo –en nuestro caso serán las matemáticas– solo o con ayuda de otra(s) persona(s). El aprendizaje es el efecto perseguido por el estudio. La enseñanza es un medio para el estudio, pero no el único. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 59)

La consideración de saberes institucionales y de las sujeciones institucionales en el marco de las cuales se conoce supone el re-

3 En la TAD, todo lo que existe para una persona o una institución (y, por lo tanto, para cada uno de sus `sujeto´, a saber de sus actores) se denomina objeto" (Chevallard, 2013, p. 6).

4 La tarea está caracterizada por un verbo y un complemento que la especifica; la técnica es una manera de hacer dicha tarea o tipos de tarea; la tecnología es un discurso interpretativo y justificativo de la técnica; y la teoría asociada a una técnica es la tecnología de su tecnología.

conocimiento de tipos de tareas (y técnicas asociadas) que se resuelven en dicho contexto. En el ámbito de la albañilería, algunos de los rasgos de estas prácticas institucionales que devienen en problemáticos –ya que no son asumidos como contextos de enseñanza– son: la naturalización de las técnicas, la posibilidad de la ausencia de una nominación, la especificidad de su tecnología, la irreversibilidad de la mayoría de las tareas, la relación laboral entre los sujetos (dueños, arquitectos o ingenieros, albañiles). Las tareas tienden a rutinizarse y se estabilizan las técnicas que permiten resolver estas tareas rutinarias de modo idóneo. Este fenómeno de naturalización conlleva la desvinculación de la técnica de las tareas problemáticas que le dieron origen e implica la necesidad de un mayor dominio para adaptar la técnica a situaciones particulares que pueden presentarse.

En una institución de práctica como las obras de albañilería, cuyo trabajo no está organizado en torno al estudio del conocimiento matemático, los mecanismos de transmisión están articulados a través de la participación en la ejecución de las prácticas o tareas, más que de la nominación de los objetos que permiten resolver esas tareas.

Una dimensión de estas prácticas institucionales excede la de la praxis y alude a un discurso sobre las técnicas empleadas para la resolución de tareas, que como ya dijimos, es denominado "tecnología" y asegura la justificación y el control de las técnicas institucionales.

Estos ejes de indagación sugeridos por la perspectiva institucional de los saberes matemáticos emergieron en el marco de la tesis de posgrado, en donde caractericé tipos de tareas con etapas de obra ya realizadas mediante un minucioso relevamiento empírico (observaciones, registros fotográficos y entrevistas a albañiles). Para su análisis realicé un estudio en términos de la TAD de tipos de *tareas y técnicas* utilizadas acordes a las condiciones de realización (obra pequeña, herramientas, materiales, sujetos).

Construí una estrategia analítica a través de la identificación y descripción de tareas puntuales, la explicación o justificación de la *técnica* por parte de los sujetos y un *discurso tecnológico* desde un posicionamiento como matemático, es decir, desde un vocabulario que funciona como *tecnología* de otra institución. Así, en la actividad de levantar paredes de ladrillo visto he reconocido el *tipo de tarea* "levantar pared", describiendo cómo se realiza *(técnica)*, con los controles y ajustes necesarios para un buen acabado, analizando de manera particular un *subtipo de tareas* que es el colocar reglas para marcar los niveles en los que se ubicarán las hileras de ladrillos.

Asimismo, la caracterización de las herramientas me introdujo en otras cuestiones que ameritan ser profundizadas: *gestos*, objetos *ostensivos y no ostensivos* (Chevallard, 1991) y

"En una institución de práctica como las obras de albañilería, cuyo trabajo no está organizado en torno al estudio del conocimiento matemático, los mecanismos de transmisión están articulados a través de la participación en la ejecución de las prácticas o tareas, más que de la nominación de los objetos que permiten resolver esas tareas"

los modos de conceptualizar las herramientas empleadas (*artefactos/ dispositivos/ instrumentos* (Solares, 2012). La difusión de los conocimientos que componen estos *tipos de tareas* tiene un potencial interesante para la formación de otros actores que se relacionen con esa práctica (Giménez, 2015, 2016).

A continuación, realizaré una reconstrucción de la tarea de levantar paredes de ladrillo visto con el fin de poder analizar la subtarea de colocar reglas.

La tarea de levantar una pared

Esta tarea consiste en levantar un muro de ladrillos[5] perpendicular a la capa aisladora[6] hasta una altura aproximada de 2,10 metros. Ya que las paredes de ladrillo visto son al exterior e interior con las columnas empotradas,[7] esto implica levantar dos paredes paralelas con una luz, un espacio entre ellas, de menos de 1 cm, una con la vista de los ladrillos hacia el exterior y la otra hacia el interior con respecto a la habitación.

Durante el período de observación, tomé registro del levantado de una pared exterior de dos ambientes. En esta tarea, los albañiles implicados eran entre tres o cuatro, uno de ellos el capataz de la obra, que dirigía y además asentaba ladrillos, los otros dos albañiles eran peones que se estaban formando en el oficio, uno de ellos alcanzaba los materiales necesarios que anticipaba y los que le solicitaban, y el otro peón realizaba el mismo trabajo que el capataz pero bajo constante supervisión.

Existen muchas subtareas implicadas en la tarea de levantar[8] una pared de ladrillo visto, entre ellas: colocar las reglas, medir la altura de las distintas hileras de ladrillos, controlar el nivel y el plomo de las hileras, asentar los ladrillos trabando con la hilera inferior, verificando que el tamaño de la junta sea el mismo en cada hilera.

Los problemas que se pueden presentar en esta tarea son estructurales o estéticos, los más frecuentes: desajustes en el nivel y el plomo de las hileras; falta de traba entre las distintas hileras; diferencia entre el tamaño de las juntas de ladrillos, sean verticales u horizontales. En el caso de una pared de ladrillo visto, los problemas que tienen un impacto estructural también lo tienen de manera estética, que es un rasgo importante durante la ejecución de la tarea.

Entre las herramientas que se utilizan son de uso común las que utiliza el oficial para ejecutar la tarea y, por otro lado, el peón para preparar y proveer los materiales. El oficial utiliza un balde, hilo, cuchara, reglas, martillo o maza, plomada, clavos prensa, grampas, nivel de burbuja, lápiz, metro plegable y manguera de nivel. Además, para trabajar en altura se utilizan andamios. El peón, por su parte, utiliza una máquina hormigonera para preparar la mezcla, una pala ancha para cargar la mezcla en los baldes, una amoladora y un disco de corte fijo para realizar los cortes de ladrillos.

La colocación de reglas

La subtarea colocación de reglas[9] tiene consecuencias en cómo se lleva a cabo el nivel de las hileras y el plomo de la pared. A partir

5 Los ladrillos son macizos y de barro cocido, sus medidas son 24 cm x 12 cm x 6 cm.

6 Es una capa impermeable horizontal en las paredes y tabiques que permite que no suba la humedad del terreno. Además determina el nivel horizontal inferior de la obra, se realiza por encima de los cimientos con una altura que depende de la topografía del terreno. En este caso, por no tener desniveles interiores, el nivel horizontal es único.

7 Meter una columna en la pared, asegurándola con trabajo de albañilería.

8 Cabe aclarar que tanto construir como levantar son términos igualmente válidos; los albañiles se refieren a la construcción de una pared como "levantar" una pared.

9 Las reglas son unos caños rectangulares sin graduación de acero inoxidable o aluminio, cuyos lados varían entre los 2 cm y los 5 cm, y con un largo que varía entre los 1,5 m y los 2 m. En la Figura 1 pueden observarse las reglas colocadas.

de la reconstrucción de la técnica de esta subtarea, la pregunta a responder es ¿por qué se hace así? Luego, a través de los discursos tecnológicos de los albañiles, intentaré dar respuesta a este interrogante. En la dialéctica entre técnicas y tipos de tareas (Chevallard, 2013) reconstruiré la técnica para utilizar la plomada, que es fundamental para colocar las reglas. A su vez, y con ayuda de discursos tecnológicos, justifico ciertos aspectos del proceso de construcción de una pared de ladrillo visto.

Hay otras subtareas fundamentales en el levantado de una pared de ladrillo visto, que hacen a la estructura y estética de la pared; algunas son previas, como la capa aisladora y la colocación de marcos de aberturas, y otras que se realizan durante el levantado de una pared y que inciden por ejemplo en la durabilidad, como la calidad de los ladrillos (con respecto a la regularidad en su tonalidad o posibles deformaciones), y el nivel de cada hilera (controlando la distribución de la mezcla y el tamaño de las juntas verticales y horizontales). Estas subtareas también están presentes al levantar una pared revocada en ambas caras, solo que al ser de ladrillo visto, el nivel de exposición es muy elevado.

Técnica de la colocación de reglas

El problema inicial es ¿cómo colocar las reglas verticalmente para que la pared a construir sea perpendicular a la capa aisladora (y entonces al piso), y al mismo tiempo que las hileras de ladrillos sean paralelas a la capa aisladora? Antes de comenzar a asentar ladrillos con mezcla, el oficial o el capataz coloca reglas en los extremos de la pared y en los bordes de las aberturas previstas, utilizando grampas o clavos prensa.[10]

Figura 1. *Vista general de dos paredes de ladrillo visto con reglas colocadas*

Todas esas reglas se usarán para llevar el control del plomo y marcar los niveles de las hileras de ladrillos. Al ser una pared de ladrillo visto, las reglas de los extremos servirán para llevar el nivel y el plomo a la pared transversal. El capataz de la obra (Pedro) describe dónde se colocan y qué línea sigue el plomo de estas reglas:

> Pedro: (...) se coloca con la línea que viene de abajo, o sea se colocan en las esquinas las reglas como referencia del plomo que van a llevar las esquinas, ya se las coloca con la referencia que viene de la capa aisladora de abajo, porque por lo general siempre está por arriba del nivel del terreno, hay distintas alturas pero en general hay no menos de 20 o 30 cm que ya se han levantado con las capas, entonces de ahí uno ya tiene la referencia y no se va para más [como dice luego, "ni más adentro ni afuera "] porque ya las líneas de las paredes que empezás a colocar tienen que ser la continuación de la línea de las capas de abajo, no podés hacer ni más adentro ni afuera. Así que son las referencias que tenés, de la línea de la capa no te vas.

Una vez fijadas[11] las reglas, se da paso a colocarlas "a plomo" y a nivel; para esto se uti-

10 La utilización de clavos prensa o grampas depende de la altura de la pared hasta la capa aisladora, que no necesariamente es la misma en toda la obra según la topografía del terreno. Una vez que la pared alcanza cierta altura y estabilidad, se utilizan grampas.

11 Las reglas están fijadas una vez que están aseguradas contra la pared, luego se puede ajustar su posición con pequeños golpes de martillo o maza.

liza una plomada con la que se verifica que una de las caras de la regla (Cara B de la Figura 2) que da al exterior quede contenida en el plano que representa al lado exterior de la pared. Por otro lado, la cara que está asentada contra la otra pared debe quedar perpendicular al nivel de la capa aisladora. Si la regla está en una esquina, se debe hacer un trabajo similar utilizando la otra pared que se une allí, pero utilizando la cara que está apoyada contra la pared (la opuesta a la Cara A de la Figura 2) y usar como referencia el plano representado por la segunda pared. Finalmente los hilos quedan como en la siguiente imagen:

Figura 2. *Regla en esquina de pared con hilos guía.*

Luego de colocadas las reglas, se marca sobre ellas y desde la superficie de la capa aisladora los niveles de cada una de las hileras de ladrillos, que generalmente tienen 7,5 cm de altura, obtenidos con la suma de los 6 cm del ladrillo y 1,5 cm de junta. Para mantener el nivel y la línea de las hileras como se ve en la figura anterior, se coloca un hilo guía para cada una de las paredes; una vez terminada una hilera de ladrillos, se corre el hilo a la marca superior de cada regla para continuar con una hilera superior.

Un punto importante es que las reglas deben estar colocadas firmemente en las paredes para evitar que se muevan por su propio peso o que el hilo guía las mueva de su lugar.

Al finalizar la jornada, las reglas se retiran para limpiarlas y además evitar que se aflojen (por ejemplo, debido a inclemencias del tiempo) y se caigan sobre las paredes en construcción. A la siguiente jornada, se vuelven a colocar a la altura de la pared ya levantada. La capa aisladora ya no es referencia para el nivel de las hileras, y se utiliza entonces la manguera de nivel.

Para marcar el nivel de la hilera que continúa, se utiliza una manguera flexible y transparente, a la que se le pone agua dejando unos 4 cm de aire en cada extremo. Uno de sus extremos se coloca en el lugar al cual se quiere correr, es decir, trasladar determinada altura, y en el otro se hace coincidir el nivel del agua con la altura que se quiere correr. Se debe tener la precaución de que la manguera no esté plegada sobre sí misma, verificar que algo no la esté apretando, y que no queden burbujas de aire.

Figura 3. *Utilización de manguera de nivel.*

Una vez marcado el nivel se procede, como describí anteriormente, a colocar los hilos y asentar las hileras de ladrillos.

Discursos tecnológicos sobre la colocación de las reglas

En primer lugar, es necesario describir el uso de una herramienta fundamental para esta tarea: la plomada. Es una pesa de metal de forma cónica unida mediante un hilo a una chapa cuadrada. El hilo tiene una longitud regulable a las dimensiones de lo que se quiere aplomar, pasa por el centro del cuadrado y está sujeto al centro de la circunferencia base del cono. El radio de la circunferencia y la distancia del centro a un lado del cuadrado tienen la misma medida. Para utilizar la plomada, se debe apoyar un lado del cuadrado perpendicular a la regla/pared y dejar caer la pesa a una altura conveniente.

Cuando la pesa deja de balancearse, pueden suceder dos casos: A) la pesa está a lo sumo a 1 mm de la regla, entonces el aplomado es correcto; B) la pesa queda separada o bien se apoya sobre la regla; en ambos casos debe corregirse la verticalidad desplazando la regla. En el siguiente esquema mostramos los casos A y B. [*Ver* Figuras 4 y 5]

Franco (encargado de la obra) da cuenta de cómo se utiliza la plomada en el siguiente diálogo:

Entrevistador: Y para poner las reglas, ¿sí o sí necesitás la plomada o se puede usar otra cosa?
Franco: Se puede usar el nivel de mano o la plomada. Pasa que hay niveles que son muy precisos y otros que son un desastre [Se refiere a paredes irregulares], y entonces varía mucho el nivel, así que tenés que usar la plomada.
Entrevistador: ¿Y la plomada?
Franco: La plomada no falla mientras que las reglas no estén torcidas.
Entrevistador: Y mientras que la sepa usar el que pone las reglas.
Franco: Claro, exacto. Claro, hay algunos para que corregir y decir que está a plomo, a lo mejor torcieron la latita y no es así.
Entrevistador: ¿Y eso te afecta?
Franco: Lo que pasa es que cuando estás levantando pared hay que tener cuidado con el tema de la regla porque por ahí cuando tirás la tanza o el hilo si la regla... a lo mejor cuando arrancaste estaba bien y después la chocaron o alguno la movió, si no la controlás se va.
Entrevistador: ¿Y cada cuánto hay que controlar la regla?
Franco: Lo que pasa que normalmente vos nunca parás una regla... digamos cuando vas

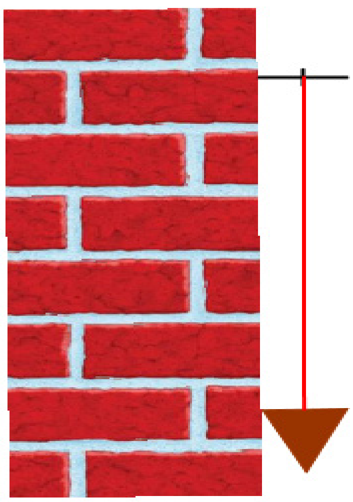


Figura 4. *Posición de plomada en pared a plomo.*

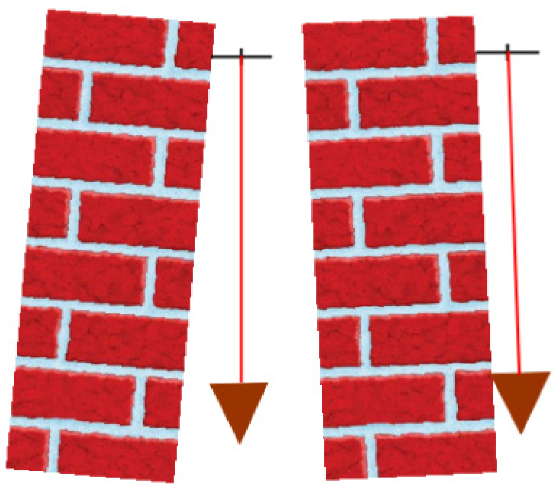


Figura 5. *Posición de plomada en pared fuera de plomo hacia cada uno de los costados.*

> haciendo paredes vistas, vos parás una regla de un metro cincuenta o dos metros, pero cuando vas a terminar la tarea del día tenés que sacarla, porque tenés que limpiar de vuelta donde está parada la regla.

¿Por qué hay que ser tan meticuloso y cuidadoso en la colocación de reglas?

Un hilo guía puede ser representado con cierta familiaridad con una recta, pensar la arista o una cara de la regla como una recta o un plano exige otra relación con esos objetos.

Necesito ahora tomar algunas afirmaciones del discurso matemático:

- Determinan un plano: tres puntos no alineados; una recta y un punto exterior, dos rectas secantes, o dos rectas paralelas. Dos planos son perpendiculares cuando una recta contenida en uno de ellos es perpendicular a otra recta contenida en el otro.
- Rectas alabeadas: dos rectas se dicen alabeadas si no se intersecan, no son paralelas y no existe un plano que las contenga.
- El radio de una circunferencia es la distancia entre el centro y cualquier punto de dicha circunferencia.
- Apotema de un polígono regular: es la distancia entre el centro y cualquiera de sus lados.

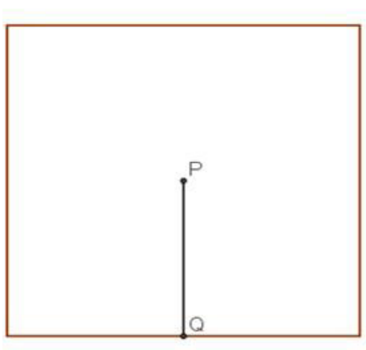


Figura 6. *Cuadrado y apotema.*

En el siguiente esquema se representan mediante planos y rectas las reglas, una de las paredes a levantar y la capa aisladora. Las rectas *B* y *C* determinan el plano de la capa aisladora *Pl(B,C)* (en azul). Las rectas *E* y *D* representan las reglas y determinan el plano *Pl(E,D)* (en marrón), al cual pertenece la cara exterior de los ladrillos de la pared a levantar. La recta *A* determinada por la intersección de los planos *Pl(B,C)* y *Pl(E,D)* es donde se sienta la primera hilera de ladrillos.

A su vez, sobre la capa aisladora, representada por las rectas *B* y *C*, es donde se va a asentar la primera hilera de ladrillos de las paredes transversales a la pared que se va a levantar.

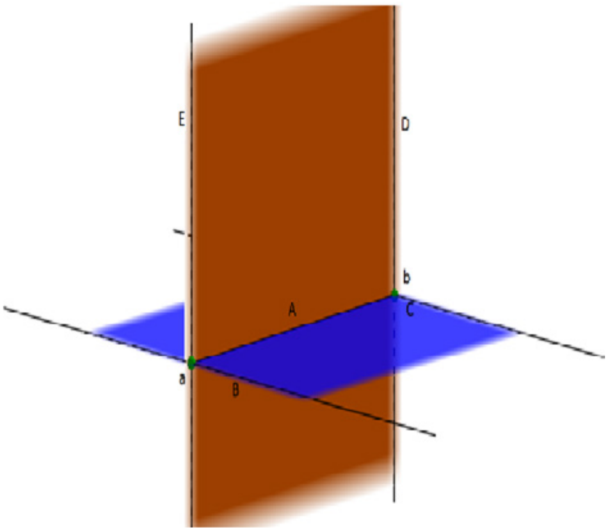


Figura 7. *Rectas y planos involucrados en la tarea de levantar una pared.*

Este discurso deja ver que cualquier mínimo movimiento de las reglas implica que las rectas *E* y *D* dejan de pertenecer al plano que determinaron originalmente, es decir, pasan a ser rectas alabeadas. Como las reglas deben desplazarse, para seguir levantando la pared o para limpiarlas al terminar la jornada, las rectas que determinan por esta nueva posición deben ser *E* y *D* contenidas en el plano *Pl(E,D).*

Para levantar la pared representada por el plano *Pl(E,D)* se comienzan a asentar los ladrillos a partir de los puntos *a* y *b* simultáneamente. En *a* tres de las aristas del ladrillo deben estar contenidas en las rectas *A, B* y *E.* En *b,* de igual modo con las rectas *A, C* y *D.* Para

 ISSN 2422-5975, en línea

realizar esto, la única referencia para el sujeto que asienta los ladrillos es el hilo guía, todas las caras de los ladrillos deben quedar contenidas en el plano *Pl(E,D)*.

El análisis de esta subtarea, tomando las rectas representadas por las reglas y el plano que determinan, muestra su complejidad, ya que cualquier error en la colocación de las reglas conduce a problemas estructurales de la pared, como por ejemplo, la falta de perpendicularidad entre las paredes y el piso.

Con respecto al discurso tecnológico sobre el uso de la plomada, este se basa en que el radio de la circunferencia de la base del cono es igual a la apotema de la chapa cuadrada, entonces la distancia entre el hilo y la regla/pared es la misma a lo largo de todo el hilo. Dado que el hilo, por la fuerza de gravedad, determina una recta vertical, la regla debe ser paralela a ese hilo.

Para explicar el uso de la manguera de nivel, incorporamos discurso de la Ley de Hidrostática de los Vasos Comunicantes, sistema compuesto por dos o más recipientes, uno con mayor nivel de líquido que otro, se unen a través de un tubo hueco generando un desplazamiento de agua desde el que contiene más líquido hacia el que contiene menos, hasta igualarse los niveles. Esto sucede por estar sometidos ambos recipientes a igual presión atmosférica.

A continuación, me explayaré sobre los controles y ajustes de la tarea descripta.

Los controles y ajustes

En este apartado describiré distintos controles sin discriminar cuáles corresponden a cada una de las subtareas mencionadas, ya que muchos de ellos tienen directa injerencia en las técnicas involucradas en ambas subtareas.

Antes de comenzar la tarea de levantar una pared de ladrillo visto, se controla el nivel de la capa aisladora. En ocasiones, si la superficie de la capa no ha sido impermeabilizada, se coloca antes de la primera hilera de ladrillos una tira de nylon o membrana para que cumpla la función de impermeabilizar de la humedad que puede provenir de los cimientos o del exterior a la pared que se está por levantar. Si bien esta etapa de obra tiene una importancia reconocida por los albañiles entrevistados, no profundizaré ya que no está dentro de las tareas delimitadas para el análisis.

Durante la ejecución de la tarea de levantar una pared, fundamentalmente hay que controlar el nivel de las hileras marcado en las reglas, evitando que se muevan las reglas y controlando constantemente que el hilo guía no se afloje ni se corra de las marcas.

Dependiendo de la posición del sujeto, oficial o capataz, los controles son parte de su responsabilidad y es por esto que regularmente uno de ellos realiza una vista general de la pared desde el suelo, como se evidencia en el siguiente relato de Pedro:

> De arriba del andamio ves mucho, tenés mucho panorama, de abajo mucho más, pero a veces es sencillo lo que estás haciendo y no necesitás bajar a ver, a mí me gusta cuando hago ciertos trabajos bajarme cada tanto que estoy arriba, me gusta mirar de abajo porque de abajo ves mucho y se ve bien.

Otro control permanente que se realiza es verificar el plomo de las reglas para evitar que una hilera quede “fuera de plomo”. Pedro se refiere a estos controles constantes que se realizan en el plomo de las reglas:

> Ese es el control que tiene que llevar el que asienta el ladrillo, el que está trabajando, eso corre por cuenta del albañil y del que dirige la obra, viene te mira de la esquina y te dice “che se está ladeando la regla”, ese es el que lleva el control de la obra y el oficial albañil también porque tiene que saber, los dos son los que tienen... y el arquitecto ni qué decirte, el que está encargado de la obra es el que tiene que llevar esos detalles a medida que va levantando.

Franco menciona los controles del nivel de las hileras en el extremo de dos paredes transversales respecto de las trabas:

> **Franco**: Normalmente vos levantás de a tramos digamos, nunca se levanta una obra completa, vos vas haciendo... vos hacés una pared, si tuviera 3 o 4 metros y de acuerdo a la cantidad de andamios porque por ahí no tenés todos los andamios, hacés... dejás las trabas, vas dejando las trabas [se refiere a dejar el espacio para las trabas] en las esquinas, entonces después la vas enganchando, tiene que quedar a nivel sí o sí la pared de un lado y del otro.
> **Entrevistador**: ¿Después a los niveles los vas tomando a partir de la pared que ya tenés hecha?
> **Franco**: No, por eso te decía que hay que corroborar todos los niveles de la capa aisladora cuando arrancás, si está todo perfecto vos podés... no vas a tener problema, tienen que coincidir los niveles. Hay que ver que cuando midas tiene que ser una medida bastante perfecta, no podés medir hilada a hilada, tenés que medir digamos si hacés una altura de 7 y medio a cada hilada de ladrillos, tenés que medir un múltiplo, digamos, hacer 10 hiladas son 75, entonces mido 10 hiladas acá y 10 hiladas allá [se refiere a las marcas de las hileras sobre la regla], y tomás ese nivel cosa de que quede exacto, porque si vos empezás a tomar hilada por hilada, cuando te acordaste se va por el error del ojo humano.

Algo que es de atención permanente y que atraviesa los controles y ajustes mencionados es el tamaño de la junta. Es importante señalar que el tamaño de las juntas horizontales debe ser siempre el mismo, y el tamaño de las juntas verticales puede variar en cierto margen. El tamaño de las juntas horizontales está directamente relacionado con la altura de la hilera, y para esto es importante que la dureza de la mezcla sea la adecuada para que los ladrillos se mantengan en la altura del hilo guía. Otro aspecto que tiene un valor estético es que al levantar la pared no deben quedar espacios vacíos en la junta, ya que solucionar ese problema implica la posibilidad de manchar la cara visible de los ladrillos.

Otro aspecto a considerar se refiere a la calidad de los ladrillos, ya que es importante estéticamente que todos tengan una tonalidad parecida, porque la pared es de ladrillo visto. Como ya dijimos, sólo se sigue el plano exterior de la pared, ya que los ladrillos de barro cocido son irregulares desde su fabricación (son hechos a mano y la composición del barro no es siempre la misma). Por esta razón, el albañil al levantar la pared elige la cara del ladrillo con las aristas menos dañadas.

> **Franco**: (...) puede llegar a venir ladrillos un poco más quemado y un poco menos quemado, se nota la diferencia, te puede variar medio cm por ladrillo, imaginate que medio cm de ladrillo que varíe estás en el horno al final de la hilada digamos, pueden ser más cortos, se acortan los ladrillos cuando están bien cocidos.

Luego enfatiza la importancia de esto para que cada ladrillo quede a nivel, dejando ver que "la mano" del albañil influye en la realización de esta tarea:

> **Franco**: (...) cuando estás levantando, depende de las características del ladrillo, si está bien escuadrado el ladrillo, porque cuando es un ladrillo que está bien parejito, está bien a escuadra. Normalmente no vamos a decir que está perfecto porque no son perfectos los ladrillos, así que vos tratás de llevarlo que se arrime bien al hilo o la tanza y te tiene que quedar tocando el hilo sin pecharlo. Y el ladrillo de abajo, como está en la misma línea [con respecto al plano de la pared], como está la tanza arriba del ladrillo ese [el ladrillo que se está asentando], no se tiene que salir de la línea de abajo. Y ahí, si queda bien alineado de costado el ladrillo, va a quedar a nivel. Todo depende de la mano del operario y aparte hay que ver el ladrillo.

Los controles de las trabas están directamente relacionados con la disposición de los ladrillos y el tamaño de las juntas, ya que si se ajusta adecuadamente (según la mano del albañil), cada ladrillo va a trabar con los de la hilera inferior. Cuando el espacio a completar en la hilera es menor que un ladrillo y medio, se colocan dos cortes mayores a medio ladrillo; esto tiene un valor estético y práctico, ya que implica asentar dos cortes mayores a una mitad de ladrillo.

Como vimos, la colocación de reglas requiere de la utilización de una herramienta como la plomada en cuyo manejo subyacen distintos conocimientos de la geometría euclidiana. Si bien no es necesario realizar ningún cálculo para utilizar la plomada, tener en cuenta aspectos de geometría en su manipulación permite llegar a resultados correctos. La colocación de ladrillos está fuertemente atravesada por las condiciones de la tarea, ya que al ser pared de ladrillo visto, los aspectos estéticos condicionan la ejecución.

Implicancias educativas

Como parte de las implicancias educativas que se derivan de la tesis de Maestría mencionada, surge el siguiente interrogante: ¿en qué medida el reconocimiento de la matemática implicada en las tareas puede ser útil para la formación de profesionales de la construcción? A continuación, ensayo una aproximación a su respuesta.

Las vinculaciones con la formación en albañilería en espacios formales o informales surgen a partir del alcance de la descripción para la formación técnica o laboral, advirtiendo que su réplica requiere el dominio no sólo de saberes de albañilería y conocimientos matemáticos, sino cierto dominio aprendido por mímesis en gestos, uso de herramientas, propiedades de los materiales, etc.

Un aspecto que se desprende de este análisis es observar cómo esos contenidos matemáticos se dictan y trabajan en la Educación Secundaria y cómo se incorporan a la enseñanza de tareas de albañilería en la Educación Técnica Profesional (ETP), en particular, en la orientación de Maestro Mayor de Obras (MMO).

“¿En qué medida el reconocimiento de la matemática implicada en las tareas puede ser útil para la formación de profesionales de la construcción? Las vinculaciones con la formación en albañilería en espacios formales o informales surgen a partir del alcance de la descripción para la formación técnica o laboral, advirtiendo que su réplica requiere el dominio no sólo de saberes de albañilería y conocimientos matemáticos, sino cierto dominio aprendido por mímesis en gestos, uso de herramientas, propiedades de los materiales, etc.”

Para comenzar a responder al interrogante planteado, es necesario un análisis crítico del Diseño Curricular de Matemática del Ciclo Básico de Educación Secundaria de la provincia de Córdoba, y comprender el tratamiento que se hace de los contenidos y su vinculación y uso en las distintas tareas de albañilería analizadas.

Por otro lado, es necesario comprender las lógicas de los colegios de Educación Técnica

 ISSN 2422-5975, en línea

Profesional en el Nivel Secundario, en las que interactúan diversos discursos tecnológicos, como el de arquitectos, ingenieros, maestros mayores de obra y albañiles, todo ello articulado con asignaturas propias de la orientación MMO.

Este diálogo entre matemática y formación específica debe considerar que en el Ciclo Básico es donde se imparten la mayoría de los conocimientos matemáticos de geometría implicados en las tareas descriptas, en las que identifiqué distintos conocimientos que dan sustento, según la TAD, a la técnica asociada.

A modo de cierre

Como hemos visto, en la tarea de levantar paredes de ladrillo visto se ponen en juego de manera implícita distintas nociones de geometría del espacio. Estos conocimientos de geometría espacial no están incluidos de modo explícito ni incluidos en otros contenidos que se trabajen en el Ciclo Básico en Matemática.

A partir de la descripción y el análisis de las tareas observadas, planteé como necesaria una exploración del tratamiento de conocimientos matemáticos ineludibles para el control y/o la ejecución de tareas en distintas materias de la orientación MMO. El propósito de esto es aproximarse a la articulación entre la asignatura Matemática y las asignaturas de la Orientación MMO. Particularmente me interesa detenerme en cómo ingresan aspectos de las tareas analizadas y cómo se promueve la transmisión de tecnologías asociadas a controles y ajustes de esas técnicas.

Considerar los usos de estos contenidos matemáticos en las asignaturas de la orientación MMO puede constituir una estrategia de enseñanza que recupere los saberes del Ciclo Básico. Para realizar esto, sería necesario conocer el uso y el lugar que se les da a los contenidos matemáticos necesarios para realizar tareas de albañilería y construcción.

Esto conduce a interrogarse si existe realmente una articulación entre los contenidos del Ciclo Básico y las asignaturas de MMO. Es decir, si se retoman los contenidos trabajados en Matemática en el Ciclo Básico y se los recontextualiza, o bien se toman contenidos y nociones matemáticas sin resignificarlas a los usos que se plantean en las necesidades de la orientación de MMO.

Ampliar la formación tecnológica (en el sentido de la TAD) seguramente ampliará el contexto de aplicación de las técnicas dominadas y podría dar un mayor alcance a la técnica conocida (Chevallard, 1997). Es decir, conocer los contenidos matemáticos que dan sustento a las técnicas permitiría adaptarlas a otros contextos y circunstancias para mejorar los controles y ajustes que se realizan durante la ejecución de las tareas.

Esto me lleva a formular otro interrogante: ¿los contenidos matemáticos que se dictan en la asignatura Matemática en la orientación MMO responden a las necesidades que se plantean en las asignaturas de dicha orientación? Su abordaje requeriría no sólo acceder al testimonio de los docentes de la orientación, sino también observar las prácticas de los estudiantes, su dominio de los contenidos matemáticos, los usos y las adaptaciones a las necesidades de las tareas que realizan.

Para conocer las posibles articulaciones entre los contenidos de Matemática en el Ciclo Orientado MMO, es necesario un estudio de los contenidos de la asignatura Matemática de dicha orientación. Otro desafío en esta construcción de posibles articulaciones sería conciliar el estudio de problemas extra-matemáticos vinculados a necesidades planteadas por otras áreas sin relegar un necesario trabajo intramatemático.

Referencias

Achilli, E. (2005). *Investigar en Antropología Social. Los desafíos de transmitir un oficio.* Rosario: Laborde Editor.

Chevallard, Y. (2013). *De la transposición didáctica a la teoría antropológica de lo didáctico*. Curso dictado en FAMAF, Córdoba, Argentina, 26 al 29 de noviembre.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsori.

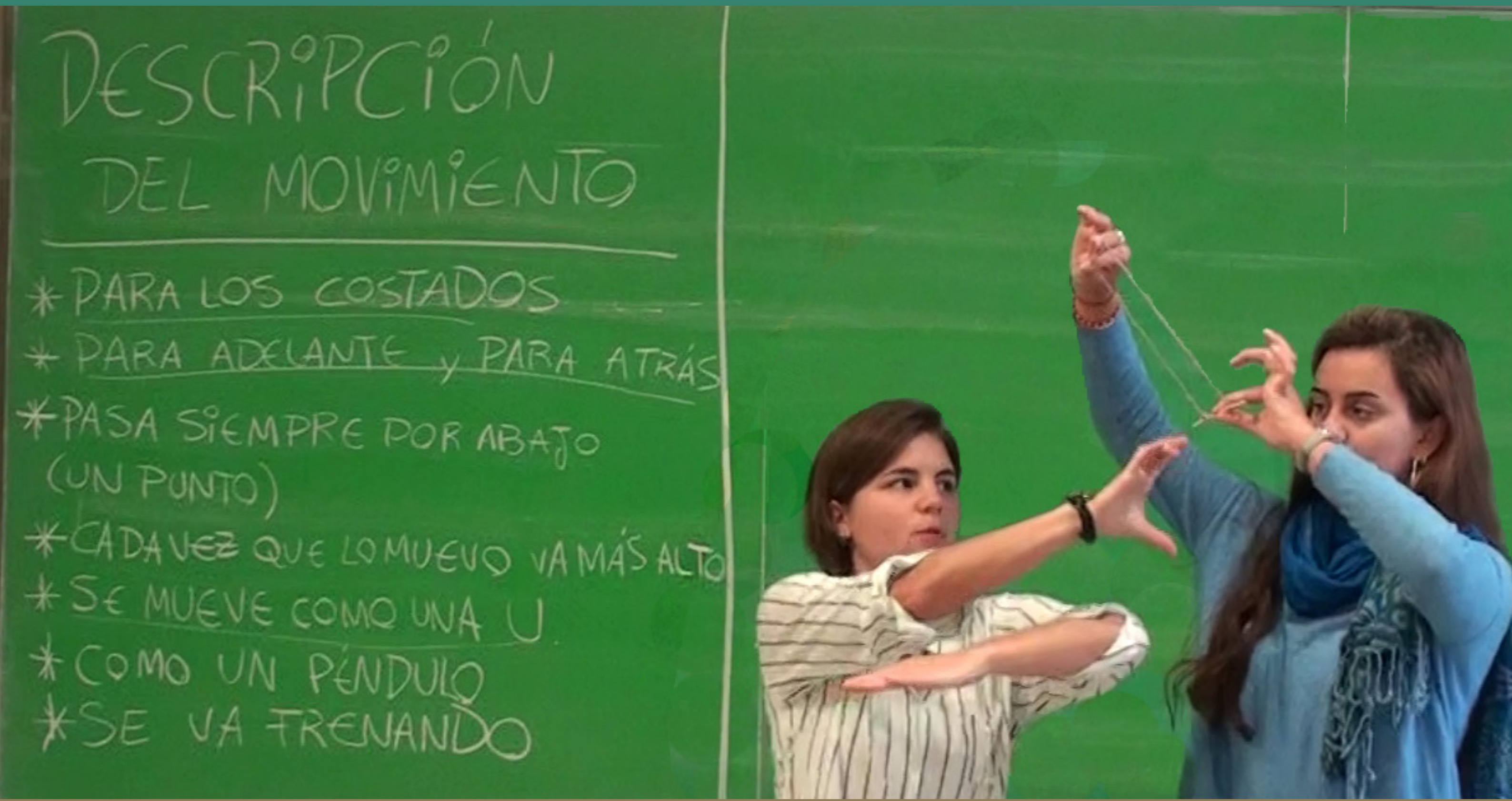
Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* París: La Pensée Sauvage.

Gimenez, A. (2018) *Prácticas donde subyacen conocimientos matemáticos en grupos de albañiles en obras pequeñas* (Tesis de Maestría en Investigación Educativa con mención socioantropológica). Centro de Estudios Avanzados, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad Nacional de Córdoba. Defendida en octubre de 2018. Córdoba.

Gimenez, A. (2015) *Estudio de una práctica de construcción de ladrillo visto, desde una perspectiva de la educación matemática.* IX Jornadas de Investigación en Educación, CIFFyH, Córdoba.

Solares, D. (2012). Conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares. Análisis de un caso en el contexto de los niños y niñas jornaleros migrantes. *Educación Matemática*, (24), 1, 5-33.

Uso de videos en la formación inicial de profesores de matemática como recurso para observar clases



Fotografía obtenida por los autores.

Cristina Esteley • Mónica Villarreal
María Mina • Araceli Coirini

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Cristina Esteley

Master en Educación Matemática por The City University of New York y Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Realiza investigaciones centradas en la formación de profesores de matemáticas cuando estos se involucran con actividades de modelización matemática en contextos que propician el trabajo colaborativo y el uso de tecnologías. Realiza y ha realizado colaboraciones con colegas del ámbito internacional en el marco de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática. Dirige tesis de doctorado en temáticas vinculadas con sus investigaciones.

Mónica E. Villarreal

Licenciada en Matemática por la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Dra. en Educación Matemática por la Universidade Estadual Paulista (Brasil). Profesora Titular de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) de la UNC e investigadora del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) de Argentina. Integrante del Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología (GECYT) de la FAMAF. Actúa en la formación inicial de profesores de matemática. Ha realizado y realiza investigaciones en torno al desarrollo profesional de profesores, la modelización matemática y el uso de tecnologías digitales en contextos educativos, dirigiendo proyectos de investigación sobre estas temáticas.

María Mina

Profesora en Matemática, Física y Cosmografía. Magister en Procesos Educativos mediados por Tecnologías por la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Actualmente se desempeña como docente en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF-UNC). Cuenta con publicaciones y presentaciones en reuniones científicas sobre el uso de las tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática. Participa en proyectos de investigación del Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología (GECYT-FAMAF). En la actualidad cursa el Doctorado en Educación en Ciencias Básicas y Tecnología (UNC).

Araceli Coirini Carreras

Profesora en Matemática, por la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Especialista Docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria, por el Ministerio de Educación de la Nación. Participa como docente en FAMAF y en la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la UNC. Integrante del Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología (GECYT-FAMAF). Realiza su tesis de doctorado en Ciencias de la Educación en la UNC, gozando una beca doctoral otorgada por la Secretaría de Ciencia y Tecnología (SECYT-UNC).

Uso de videos en la formación inicial de profesores de matemática como recurso para observar clases

Use of videos in preservice mathematics teacher education as a resource to observe classes

Cristina Esteley *
Mónica E. Villarreal **
María Mina ***
Araceli Coirini Carreras ****

Fecha de recepción: 9 de Abril 2021
Fecha de aceptación: 31 de Mayo 2021

RESUMEN

El uso de videos de clases en la formación inicial de profesores es una práctica que contribuye para el desarrollo de la competencia denominada noticing. Tal competencia se refiere a prestar atención, reconocer y dar sentido a aspectos específicos emergentes durante las interacciones en el aula. Con base en datos recogidos en un curso de Metodología y Práctica de la Enseñanza del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba, mostramos evidencias del desarrollo de esta competencia al trabajar con videos de simulaciones de clase en el marco del particular contexto educativo en que se recogen los datos. Recurrimos a un estudio de casos de carácter descriptivo-analítico, colocando el foco de análisis sobre los informes escritos de dos estudiantes próximas a la finalización de su carrera, en los que plasman sus reflexiones generadas al observar el video de su primera clase simulada. El análisis realizado entrecruza aspectos relevantes observados en la clase de Matemática por las dos futuras profesoras, sus reflexiones e interpretaciones sobre lo observado, y las conexiones que realizan entre lo observado y los saberes de la actividad docente. Los resultados muestran que, si bien en los informes de las dos estudiantes se evidencian aspectos relevantes, reconocidos como propios de profesores noveles en la literatura, estos son acompañados por importantes reflexiones, críticas y propuestas de alternativas de gestión y de desarrollo personal que evidencian una red de habilidades propias o de la competencia de ***noticing***.

palabras clave

formación de profesores · **uso de videos de clases** · ***noticing*** · **simulación de clases**

Contactos
*cristina.esteley.de.g@unc.edu.ar ; ** monica.ester.villarreal@unc.edu.ar ;
maria.mina@unc.edu.ar ; * araceli.coirini@unc.edu.ar

ABSTRACT

The use of classroom videos in initial teacher education is a practice that contributes to the development of the competence called noticing. Such competence refers to paying attention, recognizing and providing sense to specific aspects arising during classroom interactions. Based on data collected in a Teaching Methodology and Practice course in the Mathematics Teacher Education program at the National University of Córdoba, we show evidence of the development of this competence when videos of class simulations are used. We adopted a descriptive-analytical case study, placing the focus of analysis on the written reports of two students close to the end of their career, in which they express their corresponding reflections elaborated by observing the video of their first simulated class. The analysis interweaves relevant aspects observed in the mathematics class by the two future teachers, their reflections and interpretations of what they observed, and the connections they make between what they observed and their knowledge of the teaching activity. The results show that, although in the observations of the two students there appear aspects recognized, in the literature, as typical of novice teachers, these are accompanied by important reflections, criticisms and proposals for management and personal development alternatives that evidence the development of the *noticing* competence.

keywords

teacher education · **use of classroom videos** · ***noticing*** · **class simulation**

Introducción

El uso de videos en la formación inicial y continua de profesores de Matemática se ha tornado una práctica fértil para el desarrollo profesional de docentes, debido a que permite capturar y analizar en detalle la riqueza y complejidad de las aulas. En el sistema formador argentino existen experiencias de trayectos formativos centrados en el análisis de prácticas de la enseñanza de la Matemática mediante el uso de videos. Por ejemplo, entre los años 2013 y 2014, el Instituto Nacional de Formación Docente llevó a cabo un proyecto de análisis de clases en los primeros grados de la escuela primaria (Becerril et al., 2015). Como resultado de la implementación de este proyecto, se destaca el análisis de videos de clases como una oportunidad de aprendizaje de algún aspecto particular de la enseñanza en un contexto determinado, como así también el aprendizaje de habilidades de análisis en general. En el ámbito local de la jurisdicción Córdoba, el Ministerio de Educación desarrolló un programa de capacitación para maestros en ejercicio que, mediante videos de clases reales de Matemática, colocó la atención en las instancias y los modos de intervención del docente a cargo de esas clases, en interacción con sus estudiantes.[1]

Los videos pueden destacar aspectos de la vida en el aula que un profesor podría no

1 La producción audiovisual producida para el desarrollo de este programa de capacitación puede encontrarse en: http://horacioaferreyra.com.ar/sandra-ines-molinolo/

percibir mientras realiza su tarea docente, y capturan el tejido social de un espacio educativo específico (Hollingsworth y Clarke, 2017). Sherin y Dyer (2017) presentan evidencia de que cuando un profesor filma su propia clase y selecciona un extracto para compartir y discutir con sus colegas, ocurren aprendizajes significativos para todos los involucrados en esa actividad. Por su parte, Karsenty y Arcavi (2017) destacan las potencialidades del uso de videos de clases de profesores desconocidos (para el observador), para reflexionar sobre las propias prácticas profesionales.

> *“El uso de videos en la formación inicial y continua de profesores de Matemática se ha tornado una práctica fértil para el desarrollo profesional de docentes, debido a que permite capturar y analizar en detalle la riqueza y complejidad de las aulas.”*

Según Vogler y Prediger (2017), el empleo de videos de clases en programas de desarrollo profesional permite, a través de la reflexión colectiva entre colegas, concientizar y sensibilizar a los profesores en relación con la importancia de prestar atención a las diversas ideas de los estudiantes y las interacciones en el aula. La idea de “prestar atención” nos remite a la noción de noticing (Mason, 1991), “observar con sentido” (Groenwald y Llinares, 2019) o “mirar con sentido” (Llinares, 2012).

Mason (1991) señala que *noticing* se vincula con la acción de notar (*to note*, en inglés), y que en su etimología la palabra “notar” alude al hecho de “[...] hacer una distinción, subrayar algunos rasgos percibidos y, en consecuencia, ignorar otros” (p. 36, traducción propia). De modo similar, en español, la palabra “notar” proviene del latín notare, y significa señalar una cosa para que se conozca o se advierta, reparar o advertir. Al vincular esa primera representación de noticing con la enseñanza, Mason propone la idea de “observación disciplinada”. Tal observación requiere prestar atención, realizar una reflexión sistemática junto a otros, reconocer relaciones entre lo observado en un instante o vincularlo con observaciones anteriores, y validar junto a otros las interpretaciones sobre lo observado. Profundizaremos sobre la noción de *noticing*, observar con sentido o mirar con sentido, en la sección titulada “Marco teórico”. En este artículo decidimos emplear la denominación *noticing* para referirnos a esta compleja competencia asociada con el acto de observar disciplinadamente. Las denominaciones “observar con sentido” o “mirar con sentido” son traducciones interpretativas al español del término originalmente propuesto por Mason. La palabra *noticing* tiene una densidad conceptual que va más allá de lo que transmite “observar o mirar con sentido”.

> *“Cuando un profesor filma su propia clase y selecciona un extracto para compartir y discutir con sus colegas, ocurren aprendizajes significativos para todos los involucrados en esa actividad.”*

Múltiples autores, tales como Llinares (2012), Buchbinder y Kuntze (2018), o quienes publicaron sus investigaciones en el libro editado por Schack et al. (2017), abordan diversos aspectos vinculados con la noción de *noticing* y señalan la necesidad de trabajar y buscar medios para desarrollar esta compleja competencia tanto en la formación continua como en la formación inicial del profesor. Una de las actividades más promisorias en este sentido consiste en ver, examinar, analizar y discutir videos de prácticas docentes diversas. Ribeiro (2018) destaca que el uso de videos propicia un acercamiento a situaciones reales de enseñanza para ser observadas, analizadas y reconstruidas de forma individual o colectiva y así promover el desarrollo profesional docente.

“El empleo de videos de clases en programas de desarrollo profesional permite, a través de la reflexión colectiva entre colegas, concientizar y sensibilizar a los profesores en relación con la importancia de prestar atención a las diversas ideas de los estudiantes y las interacciones en el aula.”

La investigación en torno al uso de videos para desarrollar o mejorar la competencia de *noticing* entre estudiantes que se están formando como futuros profesores de Matemática ofrece resultados alentadores en ese sentido. En De Paula et al. (2021) se reseñan varios trabajos desarrollados en Brasil y Portugal con futuros profesores de Matemática, en los cuales se hizo uso de diversos recursos multimedia, entre ellos videos de clases, para reflexionar sobre prácticas de enseñanza exploratoria de la Matemática.

“El uso de videos propicia un acercamiento a situaciones reales de enseñanza para ser observadas, analizadas y reconstruidas de forma individual o colectiva y así promover el desarrollo profesional docente.”

Star y Strickland (2008) desarrollaron un estudio con futuros profesores de matemática en el marco de un curso de Metodología de la enseñanza. En este, se hacía uso de videos de clases como recurso para desarrollar un componente básico de la competencia de *noticing*: identificar lo que es importante o notable en una situación de clase. En el estudio no se pretendía de los futuros profesores un análisis interpretativo o un juicio sobre lo ocurrido en las clases observadas a partir de los videos. El estudio utiliza cinco categorías de observación para evaluar los avances de los estudiantes en el desarrollo de la competencia de *noticing:* entorno de la clase, gestión de la clase, tareas, contenido matemático y comunicación. Los resultados del estudio muestran que los futuros profesores manifestaron una mayor habilidad para identificar eventos relacionados con la gestión de la clase y mayor dificultad para prestar atención a detalles asociados con el contenido matemático y las características de la comunicación en el aula. Por su parte, Males (2017) también reporta un estudio con futuros profesores de Matemática para la escuela secundaria que cursaban Metodología de la enseñanza y utiliza, en su análisis, el mismo sistema de categorías empleado por

ISSN 2422-5975, en línea

Star y Strickland (2008). El estudio examina lo que esos futuros profesores identificaron como destacable o digno de ser notado al ver videos de sus propios compañeros enseñando. Los aspectos que fueron más destacados estuvieron relacionados con la comunicación en el aula, el contenido matemático y la gestión de la clase. También pudo verse que inicialmente los aspectos destacados se referían principalmente al profesor, su discurso y sus acciones, más que al discurso y las acciones de los estudiantes. Los dos últimos estudios ponen en evidencia diferencias en cuanto a los aspectos que los futuros profesores reconocen como relevantes. Estas diferencias tal vez se pueden explicar a partir de la diversidad de los contextos educativos o los diseños investigativos puestos en juego. A pesar de las divergencias, en ambos trabajos hay coincidencia en cuanto a la posibilidad de desarrollo de la competencia de *noticing* en los futuros profesores.

En nuestro ámbito local, interesadas por la investigación sobre la formación de futuros profesores de Matemática, y como docentes de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC) a cargo de los espacios curriculares Didáctica Especial y Taller de Matemática (DM) y Metodología y Práctica de la Enseñanza (MyPE), recurrimos al uso de videos de clases de Matemática para el nivel secundario, a fin de propiciar el desarrollo de una mirada analítica entre los futuros profesores en instancias de observación de tales clases. En particular, una tarea que proponemos a los futuros profesores en el espacio de MyPE es la preparación de una clase para la escuela secundaria, con una duración de 20 minutos, que es filmada mientras se desarrolla frente a sus compañeros, que actúan como estudiantes ficticios de esta clase. El video de esta clase simulada es empleado como insumo para desarrollar, junto con los futuros profesores, un proceso de análisis crítico de lo ocurrido. Este uso particular de videos y su vínculo con la competencia de *noticing* es sobre lo que queremos reportar en este artículo. El objetivo que guía nuestro estudio es reconocer y caracterizar el desarrollo de habilidades vinculadas con la competencia de *noticing* en futuros profesores que analizan videos de sus propias clases simuladas.

A partir de los aportes de los autores referenciados, asumimos como hipótesis de trabajo[2] que el uso y el análisis de videos contribuyen al desarrollo de la competencia de noticing. Sobre la base de esta hipótesis y el objetivo del estudio, buscamos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué habilidades vinculadas con la competencia de noticing son desarrolladas por futuros profesores a partir del análisis de videos de sus propias clases de Matemática simuladas?

Para dar cuenta del objetivo planteado y ofrecer respuesta a la pregunta de investigación, en la siguiente sección, recuperamos aportes teóricos sobre la noción de noticing, a fin de fijar posturas que dan sustento a nuestro trabajo y aportan categorías para el análisis de resultados.

> *“¿qué habilidades vinculadas con la competencia de noticing son desarrolladas por futuros profesores a partir del análisis de videos de sus propias clases de Matemática simuladas?”*

2 Una hipótesis de trabajo en un estudio cualitativo es la formulación de uno o varios supuestos sobre posibles respuestas o soluciones a los problemas que se van a tratar. Se trata de supuestos basados en hechos conocidos que sirven como puntos de referencia para una investigación posterior (Achilli, 2008).

Marco teórico

La noción de *noticing* (Mason, 1991, 2009), observar con sentido (Groenwald y Llinares, 2019) o mirar con sentido (Llinares, 2012), se relaciona con prácticas deseables e inherentes a la profesión docente y que resultan factibles de ser promovidas tempranamente en la formación de profesores. Es posible reconocer en la literatura cierta diversidad en los modos de considerar tal noción. En algunos casos, es considerada como una habilidad (Schack et al., 2017), en otros, como una competencia (Groenwald y Llinares, 2019; Llinares, 2012). Incluso existen autores como Mason (1991, 2009) quien, sin designarla de un modo particular, la asocia a la idea de "observación disciplinada" y la vincula con ciertos procesos o conjunto de acciones y con la propia enseñanza.

Este autor considera que, para hacer avanzar una observación disciplinada, es necesario ampliar nuestra sensibilidad y los momentos metacognitivos sobre lo observado. Para ello, propone recuperar o apelar a una red de acciones tales como: "[...] hacer, hablar y grabar; ver, decir y grabar; [...] captar el sentido; dar cuenta de y dar cuenta para [...]" (Mason, 1991, p. 41, traducción propia). Es más, Mason (2009), tomando como eje la idea de observación disciplinada, postula que la enseñanza, en su sentido pleno, requiere un estudio continuo de uno mismo como docente y del contenido a enseñar para comprender las atribuciones de sentido de los estudiantes.

Por su parte, Groenwald y Llinares (2019) sostienen que observar con sentido es una competencia que implica una red compleja de habilidades que guardan ciertas conexiones entre ellas. Reconocen las habilidades de identificar, interpretar y tomar decisiones de acción como aquellas que permiten al futuro profesor reconocer ciertas situaciones de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas como relevantes. Además, los autores agregan la habilidad vinculada a realizar conexiones entre la situación de enseñanza objeto de análisis y los conocimientos más generales provenientes de la didáctica de la Matemática, aprendidos previamente por los futuros profesores. Por su parte, Llinares (2012) propone diseñar entornos de aprendizaje dentro de la formación inicial para promover el desarrollo de la competencia de mirar con sentido, apelando al análisis de situaciones de aula –enfocadas en la acción del profesor o de los alumnos– y mediadas por la reflexión de los futuros profesores. Por ejemplo, en relación con habilidades centradas en las interacciones docente-estudiantes se menciona la habilidad para prestar atención e interpretar las estrategias matemáticas que llevan a cabo los estudiantes para responder a los requerimientos del docente (Sherin y Dyer, 2017). La observación con sentido del profesor es un elemento importante de la práctica reflexiva-crítica que le permite dar cuenta de lo que acontece en aula, estableciendo conexiones entre percepción y reflexión (Sherin y Dyer, 2017). La reflexión crítica fuera del aula promueve la toma de consciencia sobre lo que acontece en su interior, posibilitando darse cuenta de lo que ocurre en el aula, a fin de producir cambios en la práctica y el desarrollo de competencias importantes para la profesión docente (Jaworski, 2008).

Con base en las ideas presentadas, en este artículo, asumimos que *noticing*, observar con sentido o mirar con sentido es una competencia que implica una compleja red de habilidades tales como: reconocer o identificar aspectos relevantes en una clase de Matemática, reflexionar e interpretar sobre lo identificado y tomar decisiones de acción durante o a posteriori de la clase sobre aquello identificado como relevante, realizar conexiones o relaciones entre los aspectos observados o entre estos con saberes propios de la actividad docente (por ejemplo, didáctica de la Matemática) u otros relevantes. Se asume que estas habilidades se ponen en juego y/o desarrollan conjuntamente por uno o más sujetos en simultáneo o de forma asincrónica.

Tal como se explicita en la Introducción, el objetivo que guía nuestro estudio es reconocer y caracterizar el desarrollo de las habilidades vinculadas con la competencia de *noticing* en los futuros profesores que analizan videos de sus propias clases simuladas. A continuación, se detallan las dimensiones a ser consideradas al momento de examinar las producciones de los futuros profesores en torno al análisis de videos.

1. Aspectos relevantes observados en la clase de Matemática
2. Reflexiones e interpretaciones sobre lo observado
3. Conexiones o relaciones establecidas entre los aspectos observados o con saberes de la actividad docente

Para dar sentido a las preguntas formuladas y a las opciones teóricas tomadas, se presenta a continuación el contexto educativo en el que se desarrolla el estudio reportado. Esta contextualización ofrece también elementos para comprender la posterior opción metodológica y las fuentes de información seleccionadas.

Contexto educativo Características generales de la asignatura Metodología y Práctica de la Enseñanza (MyPE)

MyPE se dicta en el cuarto y último año de la carrera Profesorado en Matemática, tiene una carga horaria semanal de 8 horas reloj y se organiza en torno a dos etapas principales de formación. En la primera, se tratan problemáticas correspondientes a los diferentes niveles de concreción del currículum, haciendo un recorrido que parte de lo macro-educativo hacia lo micro-didáctico. En esta etapa se realizan las "simulaciones de clases" mencionadas en la Introducción y descriptas en detalle en esta sección. La segunda etapa se desarrolla en torno de las primeras prácticas docentes de los futuros profesores: planificación, implementación y reflexión. Se realizan en pares pedagógicos, en escuelas secundarias, y tienen una duración aproximada de 20 horas cátedra.

Simulaciones de clases

Al hablar de simulaciones de clases, clases simuladas o simulacros de clases, nos referimos a la creación de una instancia de enseñanza que busca imitar o representar del mejor modo posible las condiciones de clases de Matemática en una institución educativa. No se asume que la clase simulada sustituya una práctica docente real. Sin embargo, estos ensayos son oportunidades de aprendizaje para los futuros profesores, con los que se busca contribuir al desarrollo de la competencia de *noticing*. Las simulaciones de clases, objeto de análisis del presente trabajo, fueron realizadas durante el año 2019. En ese año, nueve estudiantes cursaron MyPE y se conformaron cuatro pares pedagógicos, mientras que una estudiante trabajó sola por cuestiones personales.[3] Cuatro docentes estuvieron a cargo de la materia.

La actividad en torno a los simulacros de clases consta de tres momentos que, en orden cronológico, aparecen representados en la página siguiente, por los círculos más grandes del diagrama de la Figura 1. A continuación, se los describe en detalle. [*Pag. 74*]

3 Si bien de ahora en más, por simplicidad, nos referiremos a grupos o pares pedagógicos, en lo descripto se incluye también el caso de la estudiante que trabajó sola.

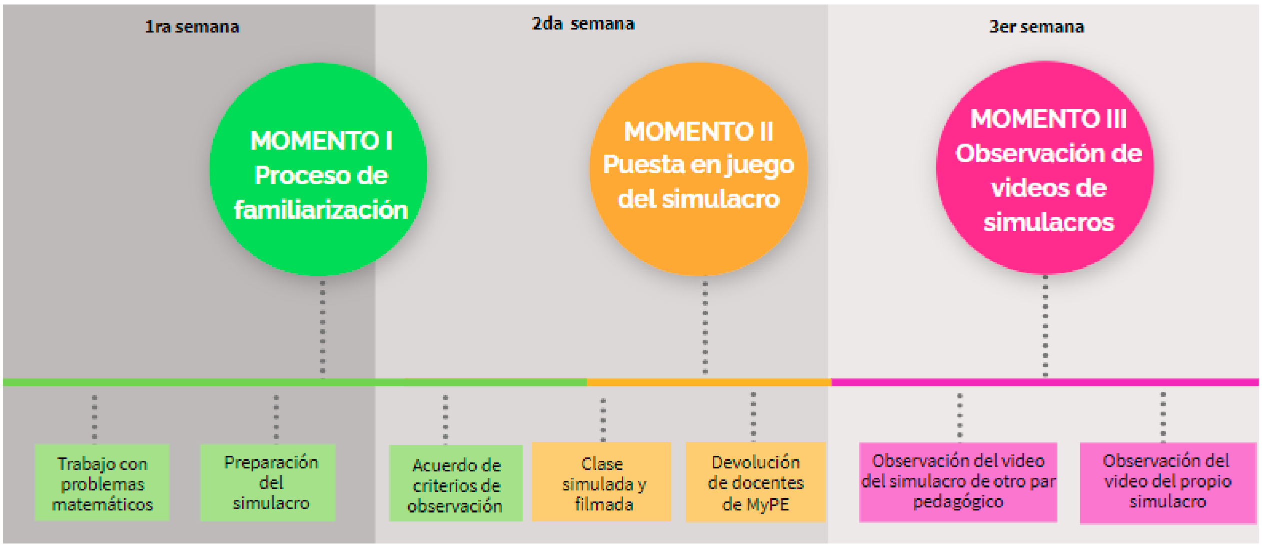


Figura 1. *Momentos de la actividad en torno a los simulacros. (Fuente: elaboración propia)*

Momento I: Proceso de familiarización

El Proceso de familiarización incluye tres tareas que se muestran en los rectángulos verdes de la Figura 1:

(a) Trabajo con problemas matemáticos

Los estudiantes resuelven, en grupos, una colección de problemas seleccionados por las docentes. En cuanto eso ocurre, las docentes interactúan con los grupos identificando dificultades o proporcionando sugerencias cuando estas son requeridas. Luego de la resolución, se realiza una discusión colectiva, enfatizando el análisis sobre formas de resolver los problemas, contenidos involucrados, posibles cursos de nivel secundario en los cuales podrían trabajarse, etc.

(b) Preparación del simulacro

Las docentes asignan a cada par pedagógico uno de los problemas ya resueltos y se propone la siguiente tarea: adaptar libremente el problema asignado y tomarlo como referencia para elaborar (solos) una secuencia de enseñanza para una clase (simulada) de 20 minutos, destinada a estudiantes hipotéticos del nivel secundario.

(c) Acuerdo de pautas de observación

A partir de un trabajo en pequeños grupos, y luego con el colectivo del curso, se acuerda qué aspectos observar durante las clases simuladas. Los aspectos seleccionados juegan el rol de pautas de observación y aluden a: interacción docente/alumno, manejo de los recursos, manejo del tiempo, gestión de la clase, corporalidad, oralidad, trabajo coordinado en el par pedagógico, entre otros. Esta última actividad da paso al Momento II.

Momento II: Puesta en juego del simulacro

En este momento, cada grupo realiza la puesta en juego de la clase diseñada, gestionando la propuesta de manera conjunta. Docentes y estudiantes de MyPE juegan distintos roles rotativos que serán descriptos posteriormente.

Al interior de este Momento II se identifican dos instancias que se muestran en los rectángulos ámbar de la Figura 1 y se describen a continuación:

 ISSN 2422-5975, en línea

(a) Clase simulada y filmada

En esta instancia de clase simulada, cada miembro del par pedagógico que da la clase asume el rol de docente de nivel secundario, implementando la propuesta didáctica diseñada para un curso particular. El resto de los futuros profesores asume el rol de estudiantes, buscando participar del modo más auténtico posible, es decir, conjeturar y asumir la posición y el proceso de pensamiento que un estudiante secundario tendría en una clase de Matemática. Dos de esos futuros profesores, además, observan la clase tomando como referencia las pautas de observación elaboradas en la instancia (c) del Momento I. Entre las docentes de MyPE, una de ellas se focaliza en observar la clase usando una guía de observación propia, otra filma, y las dos profesoras restantes asumen roles de estudiantes secundarios. Transcurridos los 20 minutos asignados para la clase, esta se interrumpe y se pasa a una instancia de devolución.

(b) Devolución de docentes de MyPE

Finalizada la clase simulada, la docente de MyPE que actuó como observadora presenta su visión de lo acontecido, procurando ofrecer nuevos puntos de observación de la clase y recuperando las pautas de observación construidas por los estudiantes en la instancia (c) del Momento I. El rol asumido por este actor simula el accionar del profesor supervisor de prácticas de enseñanza en las escuelas. Eventualmente, si el tiempo lo permite, otros miembros de la clase expresan sus opiniones sobre la clase desarrollada o plantean inquietudes. Estos intercambios también son registrados en video.

Momento III: Observación de videos de simulacros

En este momento, y con diferencia de pocos días, se invita a los futuros profesores a dos instancias de reflexión sobre lo acontecido en el Momento II (rectángulos rosa en la Figura 1). El video de cada simulacro junto con el video de registro de las apreciaciones de las docentes se constituyen en insumos para estas instancias de reflexión.

(a) Observación del video del simulacro de otro par pedagógico

A cada par de estudiantes se le asigna el video de la clase simulada del par pedagógico que observaron "en vivo", para que elaboren un texto escrito con sus reflexiones sobre lo observado en esa clase. De esta manera, los estudiantes se colocan nuevamente como "observadores", pero tienen a disposición el video de la clase, para ser reproducido las veces que sean necesarias.

En esta oportunidad, las docentes no brindan ninguna indicación particular sobre la estructura de este informe ni indican pautas de observación para ser consideradas en el mismo.

(b) Observación del video del propio simulacro

En esta instancia, cada par pedagógico observa, analiza y reflexiona sobre el video de su propia clase simulada y, luego, cada integrante presenta un informe escrito a partir de la observación del video. En esta ocasión, los docentes proporcionaron una serie de preguntas que orientaron la observación (ver Anexo) y podían emplearse para organizar el informe. Otros aspectos no contemplados en las preguntas podían también considerarse. El resultado documental de esta instancia se constituye en el cierre de este proceso complejo que vincula personas, intenciones y tareas.

En el curso de MyPE 2019, el recorrido por los tres momentos demandó aproximadamente 20 horas reloj de clase, distribuidas a lo largo de tres semanas consecutivas.

Presentado el contexto educativo que aporta información para aproximarse al ámbito de trabajo, en la próxima sección se avanza con la metodología de investigación seguida en el estudio.

Metodología

Para dar cuenta del objetivo de investigación propuesto y ofrecer respuesta a la pregunta de investigación planteada, se apela a una metodología de investigación de tipo cualitativa en el marco del paradigma interpretativo (Denzin y Guba, 2018). Se trata de un estudio de casos, de carácter descriptivo-analítico, que toma como base una compleja red de datos o fuentes de información recolectados en el año 2019 en el contexto educativo antes descripto. Los casos seleccionados son los de Vanesa y Laura,[4] dos estudiantes que estaban a punto de concluir la carrera. Ambas trabajaban juntas desde hacía tiempo en las distintas materias que cursaban. Se caracterizaban por su capacidad de trabajo en colaboración y la claridad en sus intervenciones en el aula. Estas características nos llevaron a seleccionarlas para analizar en profundidad su trabajo.

En este artículo, nuestro foco de análisis se centra en el Momento III, más precisamente, en el informe escrito de cada integrante del grupo, donde plasman sus correspondientes reflexiones generadas al observar el video de su primera clase simulada. Estos dos documentos conforman nuestra principal fuente de datos y nos posibilitan ofrecer evidencias de las habilidades vinculadas con la competencia de noticing manifestadas por Vanesa y Laura. Esta fuente principal se complementa con fuentes secundarias tales como el video de la clase simulada, las notas de campo de las docentes-investigadoras y materiales de trabajo provistos en MyPE. Tales fuentes secundarias permiten cotejar y comprender con más detalles ciertos comentarios, ideas o referencias aludidas por las futuras profesoras en sus escritos.

4 A fin de preservar la identidad de las estudiantes, los nombres indicados son ficticios.

Para reconocer y caracterizar la competencia de noticing puesta en juego por Vanesa y Laura, se consideran las dimensiones de análisis ya definidas en el marco teórico: 1) aspectos relevantes observados en la clase de Matemática, 2) reflexiones e interpretaciones sobre lo observado, y 3) conexiones o relaciones establecidas entre los aspectos observados o con saberes de la actividad docente.

La primera dimensión se refiere a una habilidad básica de la competencia de *noticing:* identificar lo que es importante o notable en una clase. En este caso, se propone el uso del sistema de cinco categorías de observación presentado en Star y Strickland (2008), como herramienta que permite clasificar inicialmente los aspectos en los que las futuras profesoras han reparado al observar los videos de clases. Las cinco categorías son: entorno de la clase, gestión de la clase, tareas, contenido matemático y comunicación. La Tabla 1 describe cada una de ellas: [ver Tabla 1, *Pag. 77*]

Estas cinco categorías son complementadas con la categoría recursos vinculada con la dimensión uno. Los recursos pueden ser dispositivos, materiales o herramientas empleadas por el docente como medio auxiliar para la docencia. Son ejemplos de recursos las calculadoras, un software matemático, el pizarrón, cuerpos geométricos, entre otros.

El análisis de cada una de estas categorías, asociadas a la dimensión 1, se entrecruza con las dimensiones de reflexiones (2) y de conexiones (3), a fin de ofrecer evidencia de la red de habilidades que sostiene la competencia de *noticing* de Vanesa y Laura. Durante el análisis, también se busca destacar particularidades o aspectos no contemplados en las categorías anteriores.

La siguiente sección comienza con una breve descripción de lo acontecido con Vanesa y Laura durante los Momentos I y II, a fin de contextualizar la clase simulada que ellas

Categoría	Descripción
Entorno de la clase	Características del entorno físico, distribución del mobiliario, materiales y equipos disponibles y utilizados, demografía de los estudiantes y del profesor, tamaño de la clase, curso.
Gestión de la clase	Formas en que el profesor enfrenta eventos disruptivos, cambios de ritmo, procedimientos para llamar a los estudiantes o manejar las tareas, presencia física del profesor (patrones de movimiento en el aula, estrategias para captar la atención, tono y volumen de voz).
Tareas	Actividades que profesor y alumnos realizan en el período de clase (por ejemplo, actividades introductorias, hojas de trabajo, apuntes, presentaciones, etc.) o actividades futuras, como tareas para la casa o los exámenes.
Contenido matemático	Forma de explicar y representar el contenido matemático en una clase. Tipo de representación de los objetos matemáticos (gráficos, ecuaciones, tablas, modelos), los ejemplos utilizados y los problemas planteados.
Comunicación	Conversaciones estudiante-estudiante o profesor-estudiante. Incluye las preguntas formuladas, las respuestas o sugerencias ofrecidas, el vocabulario utilizado.

Tabla 1. *Categorías de observación propuestas por Star y Strickland (2008, p. 113, traducción propia).*

llevaron adelante. Luego, nos centramos en el análisis del Momento III.

Resultados

Escenas de Momentos I y II. Tarea para la clase simulada y avances en *noticing*

Como se indica en la sección Contexto Educativo, Vanesa y Laura participan en la resolución de una lista de problemas (Momento I (a)). De esa lista, a ellas se les asigna el problema presentado en la Figura 2. [*Pag. 78*]

Para organizar su clase (Momento I (b)), Vanesa y Laura presentan a los estudiantes un problema similar al anterior pero modificando el enunciado del siguiente modo: "Mohammed está sentado en un columpio. Empieza a columpiarse. Está intentando llegar tan alto como le sea posible. ¿Cómo describirían este movimiento? Registren por escrito lo discutido en el grupo" (Fuente: video del simulacro de clase de Vanesa y Laura).

A posteriori, Vanesa y Laura construyen su propia lista de pautas para observar las clases (Figura 3, tipología más oscura). Luego, esa lista se completa agregando (tipología más cla-

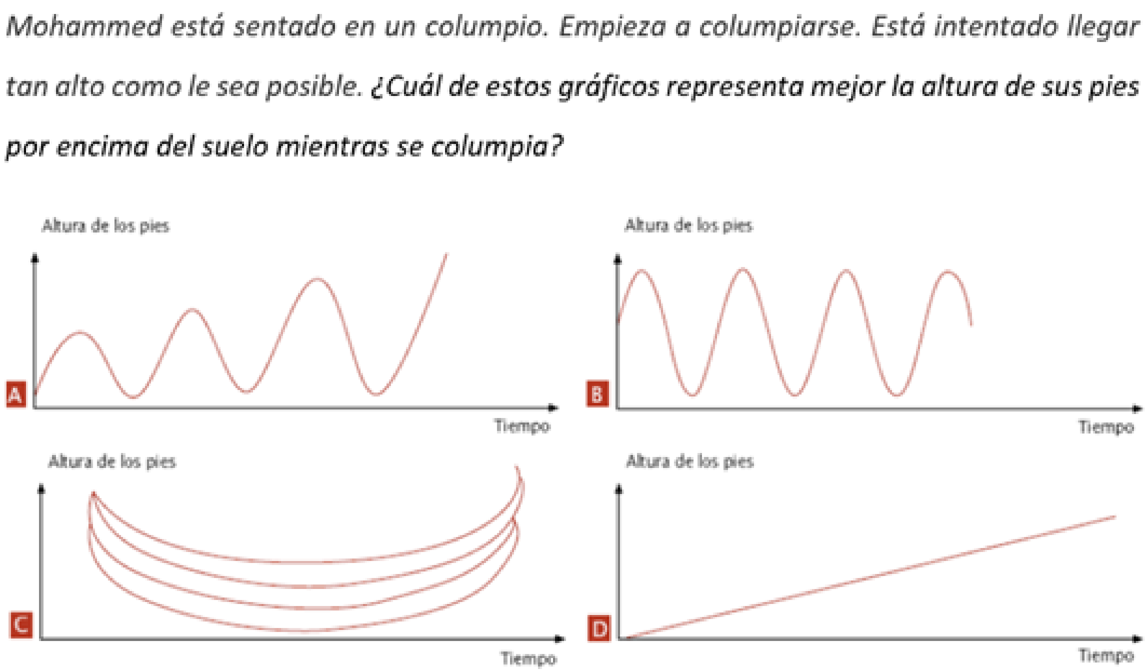


Figura 2. *Problema asignado (Fuente: Material de MyPE, 2019)*

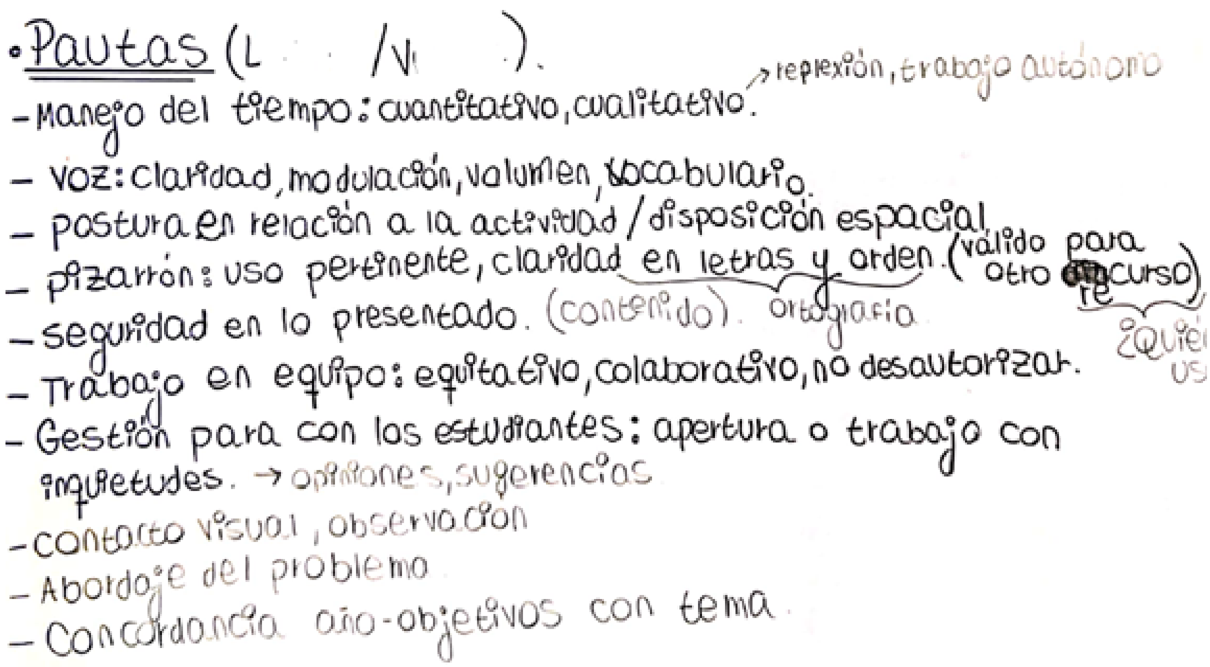

•Pautas (L /V).
- Manejo del tiempo: cuantitativo, cualitativo. → reflexión, trabajo autónomo
- Voz: claridad, modulación, volumen, vocabulario.
- postura en relación a la actividad / disposición espacial
- pizarrón: uso pertinente, claridad en letras y orden. (válido para otro recurso)
- seguridad en lo presentado. (contenido). ortografía ¿Quién us
- Trabajo en equipo: equitativo, colaborativo, no desautorizar.
- Gestión para con los estudiantes: apertura o trabajo con inquietudes. → opiniones, sugerencias
- contacto visual, observación
- Abordaje del problema
- Concordancia año-objetivos con tema.

Figura 3. *Pautas de observación registrados por Vanesa y Laura (Fuente: Registro fotográfico del cuaderno de notas de Vanesa y Laura).*

ra en Figura 3) pautas discutidas y negociadas junto con sus compañeros de MyPE (Momento I (c)).

La producción presentada en la Figura 3 pone en evidencia los primeros avances de la competencia de noticing en Vanesa y Laura, y se complementa con lo producido por sus compañeros. En esa instancia de trabajo, Vanesa y Laura comienzan a reconocer, explicitar y acordar aspectos relevantes para dirigir disciplinadamente una observación de clases. Cabe notar que, si bien la mayoría de las pautas acordadas se focalizan esencialmente en la gestión de la clase, por ser esa actividad su próximo desafío, también es factible reconocer otros aspectos.

Al inicio de la clase simulada (Momento II (a)), Vanesa y Laura presentaron el problema creado por ellas a sus "estudiantes de un supuesto 1º año del nivel secundario", a quienes invitan a organizarse en grupos pequeños. Entregan a cada grupo el enunciado impreso del problema y un dispositivo que representa la hamaca. Este dispositivo está formado por un palito de madera, con un hilo sisal atado a sus extremos (Figura 4a). Vanesa lee, para todo el curso, el enunciado. Mientras, con el dispositivo, Laura reproduce el movimiento de una hamaca; los estudiantes también imitan este movimiento con sus propios dispositivos (Figura 4b).

Figura 4a. *Dispositivo entregado a los estudiantes (Fuente: registro fotográfico del dispositivo).*

Figura 4b. *Estudiante simulando el movimiento de una hamaca (Fuente: captura de una escena del video de la clase).*

Luego del trabajo de exploración, reflexión y análisis realizado al interior de cada grupo con intervenciones de Vanesa y Laura, se realizan discusiones colectivas. Con tales discusiones quedan varios puntos, interrogantes o ideas abiertas. Pero, por cuestiones de tiempo, ambas "docentes" dan por finalizada la clase, reconociendo la necesidad de proseguir con el problema.

Durante la simulación, así como en las devoluciones que realizan las docentes de MyPE (Momento II (b)), se dieron interesantes interacciones y reflexiones anticipando, de algún modo, el trabajo del Momento III.

Noticing en el Momento III

El reporte de resultados se organiza en torno a las seis categorías propuestas en la sección de Metodología. Es necesario aclarar que los límites entre estas categorías son difusos y existen intersecciones entre ellas. Podrá observarse en nuestro análisis que hay evidencias que trascienden la categoría dentro de la cual son presentadas y entrelazan aspectos de diferentes categorías. Este hecho es inevitable, ya que la competencia de *noticing* implica el desarrollo de una compleja red de relaciones. En particular, podrá apreciarse que las categorías *tareas, gestión de la clase y contenido matemático* están profundamente relacionadas.

Aquí, nos centramos en el análisis de lo ocurrido en la instancia "Observación del video del propio simulacro", en la cual Laura y Vanesa producen y escriben informes individuales. Para observar el video y producir sus informes, las estudiantes ya contaban con un conjunto de pautas, algunas definidas colectivamente en la clase (Figura 3) y otras proporcionadas por las docentes (Anexo). Estas pautas hacían referencia a diversos aspectos de la gestión de la clase, el análisis de los recursos utilizados y el trabajo en colaboración. Este hecho nos permite afirmar que gran parte de lo observado por las estudiantes atiende a estas pautas previas y, en consecuencia, su aparición se debe a ellas. Sin embargo, también es posible señalar que hubo aspectos que no fueron notados y otros que, sin estar pautados, surgieron espontáneamente. Todos ellos dan cuenta de la primera dimensión de análisis que refiere a "Aspectos relevantes observados en la clase de Matemática".

Cabe notar que el reconocimiento de esos aspectos por parte de las estudiantes está acompañado de reflexiones, críticas, planteos de alternativas de gestión o manifestaciones de aspectos personales a mejorar, que dan cuenta del desarrollo de otras dos habilidades asociadas con la competencia de *noticing*, definidas en las dos dimensiones de análisis restantes: "Reflexiones e interpretaciones sobre lo observado" y "Conexiones o relaciones establecidas entre los aspectos observados o con saberes de la actividad docente". Las reflexiones, interpretaciones o conexiones identificadas en nuestro análisis son consideradas evidencia empírica del desarrollo de la competencia de *noticing*.

Entorno de la clase

Ninguna de las estudiantes reportó en su informe alguna observación relacionada con el entorno de la clase. Esta constatación no es sorprendente, ya que la clase fue desarrollada por ellas mismas en un entorno familiar y, por lo tanto, no merecía una atención especial en esa circunstancia de simulación. La clase simulada fue pensada para un primer año de la escuela secundaria, pero los "estudiantes" eran sus propios compañeros, compañeras o docentes, y el espacio físico era el aula en la que habitualmente tenían sus clases de MyPE. La situación de clase simulada explica, desde nuestro punto de vista, la ausencia de aspectos relacionados con esta categoría.

Tareas

Esta categoría hace referencia a la secuencia de actividades que se ponen en juego durante la clase y lo realizado por estudiantes y docente. La clase preparada por Vanesa y Laura giró en torno al problema del columpio. Para su tratamiento en el aula, se pensaron dos momentos. El primero, de carácter exploratorio, en grupos, con el registro escrito de lo discutido y una puesta en común en el pizarrón. Vanesa explica que "con ello se intentó introducir términos matemáticos que nos permitieran llegar a la representación gráfica, para finalmente presentar la actividad original". La entrega de la actividad original (ver Figura 2), en la cual se analizarían gráficos del movimiento del columpio, sería el segundo momento. Esta secuencia no pudo concretarse en el tiempo asignado para la clase. En el análisis de lo ocurrido, Vanesa reconoce que: "...la pregunta presentada para realizar una exploración invitaba mayormente a la noción de trayectoria.

Esto también nos alejó de los conceptos que deseábamos introducir. En consecuencia, hizo que con mi par forzáramos su surgimiento".

En su crítica a lo realizado, Vanesa también piensa alternativas en la organización de la tarea propuesta: "trabajar en conjunto con la segunda parte de la actividad el planteo de los conceptos matemáticos, para que pudiera hacerse más visual", y agrega: "si se hubiera hecho explícito a dónde se quería llegar [la segunda actividad a realizar], eso generaría menor confusión".

Si bien Laura y Vanesa reconocen que se generó confusión en los estudiantes, no reportan detalles sobre lo realizado por ellos, centrando su atención sobre lo que ellas como docentes consiguieron o no llevar adelante en la clase.

Ambas estudiantes reconocen la necesidad de revisar aspectos relacionados con el contenido matemático subyacente al problema del columpio. Este aspecto se profundiza en la categoría *contenidos matemáticos*. En la categoría *gestión de la clase* se amplía lo reportado en *tareas*.

Gestión de la clase

En esta categoría, las estudiantes reportan variadas observaciones acompañadas de críticas y reflexiones. Ambas se refieren a aspectos de la presencia física en el aula. Laura dice: "Mi voz fue clara, con buena modulación y un volumen adecuado [...] Me desplacé por el curso, me coloqué de manera tal que el pizarrón se veía bien, dirigí la mirada hacia todos los estudiantes". Vanesa reconoce que su voz "fue alta y clara en ciertas ocasiones, en otras no se me llegaba a entender lo dicho [...] Me desplacé por el aula en todo momento". Indica que al ver el video notó que "miré demasiado el reloj para controlar el tiempo", y que mientras su compañera estaba explicando, "solo la miraba a ella y no al curso".

Ambas estudiantes identificaron un cierto cambio en el ritmo de la clase a partir de un evento disruptivo generado por el modo de gestionar la tarea del columpio. Laura reconoce el pasaje abrupto en la clase de un momento exploratorio-descriptivo hacia una introducción forzada de conceptos. Señala que partiendo "de descripciones –guiadas por la intuición– de los estudiantes, se definieron directamente nociones matemáticas muy complejas". Las dos estudiantes reconocen que el recorte propuesto para la tarea no resultó pertinente "[...] para lo que se deseaba arribar en cuanto a lo conceptual y a lo temporal", explicitó Vanesa. Ella reconoce que "[...] quedaron fuera el trabajo en sí mismo con las representaciones gráficas y finalmente el quiebre de la idea de trayectoria con un gráfico vs [un gráfico] de dos variables", haciendo referencia a la intención (no lograda) de tratar un error común entre los estudiantes al intentar representar un movimiento: confundir la trayectoria del cuerpo que se mueve con la representación gráfica de una relación *distancia vs tiempo* en ese movimiento. Puede apreciarse que este evento disruptivo está profundamente relacionado con el contenido en juego, al cual nos referimos con más detalles en la categoría *contenido matemático*.

Hacia el final de su informe, Laura manifiesta:

> Me gustaría lograr una gestión de la clase en la que los estudiantes sean los protagonistas, en la que mi exposición sirva para guiar o responder inquietudes, pero que el rumbo de la clase se vaya dando a partir de la participación de los estudiantes.

Se pone en evidencia aquí el deseo de sostener un principio pedagógico en relación con un tipo de gestión de la enseñanza centrada en la actividad del estudiante. La propuesta inicial de "invitar a los estudiantes a un trabajo de exploración" (Vanesa), seguido de una puesta en común, da cuenta de la intención de poner en acto ese principio. Entretanto, Vanesa reconoce que "no tuvimos realmente en cuenta la cantidad de tiempo que era pertinente destinar a la exploración y su posterior puesta en común". La declaración del deseo de Laura es evidencia de que ella observó que ese principio pedagógico no pudo ponerse en juego durante la clase.

Contenidos matemáticos

Al analizar los informes de observaciones realizados por Vanesa y Laura en relación con el contenido matemático, notamos que ambas recuperan aspectos vinculados con esta categoría. Para dar cuenta de ese aspecto de la clase, apelan a una red que involucra formas de explicar y representaciones observadas apelando a un constante contraste reflexivo y crítico entre lo que ellas planificaron y lo que sucedió efectivamente.

Como se describe en gestión de la clase, ambas estudiantes vivencian una instancia de un evento disruptivo en la clase que evidencia la dificultad que puede conllevar el paso del lenguaje natural descriptivo al formal matemático. Esto parecería implicar un proceso complejo que los estudiantes no lograron transitar en las condiciones del trabajo áulico propuesto por las futuras profesoras.

Al reflexionar sobre ese hecho, Laura señala que lo deseado en relación con la producción matemática era ambicioso para las condiciones de trabajo planteadas. Para Vanesa, forzar la emergencia de los conceptos matemáticos la llevó a "perder el hilo" de la clase.

Para hacer evidente el contraste entre las ideas emergentes en el trabajo exploratorio y lo presentado de modo "forzado", en la Figura 5 se muestra lo escrito en la pizarra sintetizando las descripciones de los estudiantes y los conceptos matemáticos recuperados por las profesoras.

Finalmente, Laura y Vanesa reconocen aspectos importantes vinculados a la práctica docente. En ese sentido, Vanesa puntualiza que: "puedo reconocer que estos errores [perder el hilo] se dieron por una falta de profundización y manejo de los temas que se deseaban tratar". En esa línea, Laura reconoce que su falta de claridad en lo conceptual jugó un rol importante con el manejo de los conocimientos

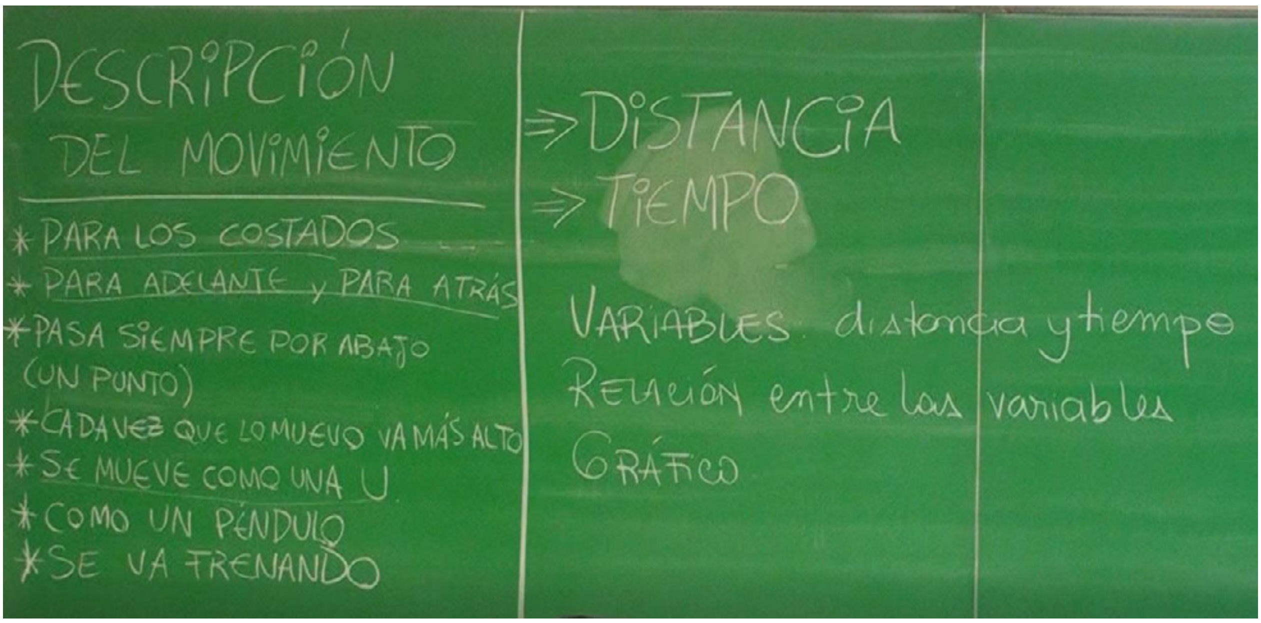


Figura 5. *Registro de los aspectos discutidos por Vanesa y Laura junto a sus estudiantes (Fuente: video de la clase de simulación de Vanesa y Laura).*

en la clase: "[...] no creo haber tenido claridad conceptual de la matemática que estaba presente en la actividad que proponíamos". Más concretamente, ella no parecía estar "[...] realmente consciente de la importancia que tiene pensar" en conocimientos matemáticos tales como "puntos de referencia, distancia".

Ambas logran reconocer contenidos matemáticos puestos en juego en la clase. Ese reconocimiento no se puede distinguir independientemente de otros aspectos relevantes tales como el tiempo, la organización de la clase, los objetivos que motivan al docente. Esa mirada luego se extiende al reconocimiento de la necesidad del manejo de los saberes al pensar una clase. Esto le permite postular a Laura que, para mejorar la planificación, sería necesario "[...] un estudio profundo de los contenidos que se van a presentar y los posibles errores y dificultades que los estudiantes puedan tener con los mismos".

Pareciera que comunicar a estudiantes conocimientos matemáticos puede requerir algo más que trabajar sola o con colegas esos saberes.

Comunicación

En cuanto a la categoría comunicación, se señala que Vanesa y Laura logran reconocer aspectos comunicativos entre ellas, o entre ellas y sus estudiantes en el transcurso de la clase. Si bien con miradas diferentes, sus consideraciones sobre la comunicación están ligadas a la gestión de la clase.

Ambas reconocen que, durante la clase, cada una logra no solo respetar a la otra en instancias comunicativas colectivas, sino que además se complementan para enriquecer la comunicación.

Laura advierte que utilizaba la expresión "¿sí?" como recurso comunicativo para cotejar la comprensión de los estudiantes en relación con lo expuesto. Reconoce que tuvo disposición de escucha hacia los estudiantes, buscando valorar positivamente sus dudas, por ejemplo, apelando a la expresión "muy buena pregunta". De modo similar, puntualiza que buscó hacer participar a los estudiantes en diversas instancias de comunicación colectiva, privilegiando un modo pausado y claro al comunicar sus propias ideas.

Vanesa, en cambio, tal vez preocupada por lo que ella reconoció como una "pérdida del hilo" en la clase, coloca su mirada en aspectos comunicativos que no dieron los resultados esperados. A partir de advertir ese hecho, identifica modos que podrían haber contribuido para mejorar la comunicación en la clase, a fin de promover mejores conexiones entre la primera actividad propuesta (explorar y describir el movimiento de la hamaca) y la segunda requerida a los estudiantes (registrar por escrito lo discutido en el grupo). Al respecto, señala que debería haber explicitado "[...] a dónde se quería llegar [con la segunda actividad]". Esto es, pasar de lo descriptivo a la comunicación de los saberes matemáticos involucrados. Para Vanesa, tal vez haber explicitado esa intención "[...] hubiese generado una menor confusión". De manera similar, reconoce que no se consensuó con los estudiantes sobre aquello que es importante registrar a fin de comunicar luego en una puesta en común. También observa que esas habilidades de registrar y comunicar información matemática quizás podrían no ser triviales para alumnos de un primer año. Vanesa reconoce que buscó comunicarse con todos los grupos de modo "equitativo" pero que, "[...] luego de leer la consigna [de la segunda actividad], no pregunté si fue comprendida o no, solo procedí a aclarar que fuera concisa la respuesta". Finalmente, Vanesa remarca: "Algo que pude reconocer al ver el video es que no me tomé un tiempo para procesar las preguntas que se me hacían". Destaca que si se hubiese tomado un tiempo antes de responder, tal vez podría haber "sido más clara".

Recursos

La noción, reflexión y análisis sobre recursos no es un aspecto extraño para los futuros profesores, ya que se lo trata tanto en el curso de Didáctica Especial y Taller de Matemática (3° año) como en MyPE. Estas reflexiones son profundizadas en MyPE en instancias previas al inicio de las simulaciones.

Laura expresa sus reflexiones en la valoración del recurso construido: la hamaca que aparece en la Figura 4a. indica que si bien, en principio, le parecía apropiada para los objetivos propuestos, encuentra varios errores:

> [...] el diseño de la hamaca no poseía la rigidez y el peso que era necesario para simular un movimiento como el buscado; la hamaca hacía hincapié en la descripción de la trayectoria, induciendo a responder erróneamente la selección del gráfico.

Al analizar el recurso, Laura considera dos aspectos. Por un lado, su diseño no permite simular el movimiento de la realidad que se esperaba; este hecho también es notado por Vanesa, quien reconoce que el dispositivo no fue el más pertinente para la presentación, ya que "por su forma, no se asemejaba demasiado a la realidad que queríamos representar, por la falta de un peso y de tensión de los hilos". Por otro lado, Laura reconoce que el uso del dispositivo puede inducir a una respuesta incorrecta, si se considera que el gráfico de la variación de la altura de los pies de Mohamed respecto al suelo, mientras se hamaca, se corresponde con la trayectoria que siguen los pies del niño durante ese movimiento. Encontramos aquí evidencia de la construcción de una importante conexión entre conceptos matemáticos y recursos pertinentes.

Frente a este evento crítico que deriva del diseño del recurso, Vanesa considera que "más pertinente hubiera sido el uso de tecnologías, algunas animaciones", pero no deja de lado el valor didáctico de un recurso manipulativo: "no lo descarto por completo y me parece una idea creativa que permite un trabajo exploratorio muy bueno". De esta manera, Vanesa coloca un mismo recurso en un contexto de posibilidades: permite animar una situación, resulta de su creatividad y habilita interesantes exploraciones con su uso.

Los aspectos de *noticing* vinculados a los recursos en Laura incorporan conexiones con futuras acciones en la práctica profesional, evidenciando una posición pedagógica frente a ello: "[...] me gustaría mejorar en la selección de recursos pertinentes. Pensando en enriquecer la tarea, poder seleccionar recursos que potencien la misma y, a su vez, saber reconocer aquellas cuestiones problemáticas del recurso seleccionado".

Conclusiones y discusión

Como se da cuenta en la literatura referenciada (por ejemplo, Llinares, 2012; Schack et al., 2017; Buchbinder y Kuntze, 2018), los estudios referidos al desarrollo de la competencia de *noticing* entre futuros profesores resulta una cuestión de interés para el campo de la Educación Matemática. Tales estudios no solo informan sobre las habilidades vinculadas a noticing, el tipo de aspectos que futuros profesores logran reconocer como relevantes en una clase de Matemática y los contextos de trabajo que parecen propiciar el desarrollo de tal competencia, sino que además sugieren el uso de ciertos recursos para promover la competencia de noticing. Al respecto, se destaca el aporte de observación de videos de clases para propiciar el *noticing*.

El presente artículo contribuye con aportes sobre el desarrollo de *noticing* en un par de futuras profesoras al observar un video de clases. La observación de los videos acontece en el marco de un particular contexto educativo local que hemos descripto en detalle. Entendemos que el dispositivo de formación propuesto en torno a la simulación de clases ofrece aportes para la formación de futuros profesores.

> *“Los estudios referidos al desarrollo de la competencia de noticing entre futuros profesores resulta una cuestión de interés para el campo de la Educación Matemática.”*

Los resultados reportados en este artículo muestran coincidencias con lo informado por Males (2017) y por Star y Strickland (2008). En ambos estudios se informa que lo referido a la gestión de la clase es la categoría sobre la que más reportan los futuros profesores. En el caso de Males, las coincidencias con los resultados reportados en el presente artículo resultan particularmente relevantes por las similitudes de los contextos educativos (un curso de Metodología de la enseñanza) y el tipo de videos observados (clases dadas por futuros profesores).

Vanesa y Laura logran primero identificar aspectos relevantes como pautas para realizar una observación disciplinada del video de su propia clase. Esas pautas son luego complementadas con una guía de preguntas creada por sus profesoras. En el análisis de sus informes de observación, identificamos que Vanesa y Laura logran reconocer aspectos relacionados con la gestión de la clase, tareas, conocimientos matemáticos, comunicación y recursos utilizados en la clase observada. Sin embargo, el formato escogido por ellas para presentar el informe no tiene la forma de un listado de ítems aislados como si dieran una respuesta para cada pregunta propuesta por las docentes. El informe presentado por ellas toma la forma de una narración que hace evidente una red compleja en la que van entramando aspectos de la clase con reflexiones sobre lo acontecido y buscando conexiones. Esta red compleja puesta en juego por Vanesa y Laura conjuga habilidades para identificar hechos relevantes: “el paso de lo cualitativo a lo matemático no se logra con facilidad”, o decisiones en la gestión de la clase: “forzar la emergencia de los conceptos matemáticos complejos” y la consecuencia de esa decisión, que deriva en ir “perdiendo el hilo” de la clase deseada. Esas redes que también tienen que ver con modos de comunicar, de gestionar las tareas o de usar un recurso, son indicadores de competencia de *noticing* (en el sentido de Groenwald y Llinares, 2019). De modo similar, el reconocimiento de que les faltó “claridad conceptual” ante la matemática a enseñar lleva a Laura a un proceso de tomar conciencia sobre la necesidad de encarar, como futura docente, “un estudio profundo” sobre los saberes a enseñar y posibles “dificultades que los estudiantes puedan tener con los mismos”. De ese modo, Laura no solo “da cuenta de”, sino que se mueve hacia un “darse cuenta para”, haciendo evidente la característica de *noticing* en el sentido de Mason (1991).

La red de habilidades de Vanesa y Laura puesta en juego como observadoras del video de su clase las lleva a un movimiento reflexivo-crítico que por momentos oscila entre el contraste de lo planificado –como proyección de lo imaginado– y lo vivido en aula, entre la consideración de los conocimientos como transparentes y la evidencia de su posible opacidad. Todos estos movimientos les permiten establecer conexiones entre percepción y reflexión (Sherin y Dyer, 2017).

Se destaca que el desarrollo del proceso de noticing de las futuras profesoras viene mediado por la observación de un video y la escritura de un informe. La disponibilidad del video implica tener la posibilidad de mirarlo con cuidado más de una vez, y de ese modo ir agudizando el foco de observación. Esa característica del video permite ir más allá del acontecimiento instantáneo que ocurre en una observación de clase en vivo. Escribir un informe implica seleccionar las palabras para expresar ideas y volver a reflexionar sobre lo escrito. La observación del video y la escritura sobre lo observado permite una reflexión crítica fuera de la propia aula que promueve la toma de consciencia sobre lo que acontece en su interior y posibilita proponer ideas para producir cambios en la propia práctica (Jaworski, 2008).

“La disponibilidad del video implica tener la posibilidad de mirarlo con cuidado más de una vez, y de ese modo ir agudizando el foco de observación. Esa característica del video permite ir más allá del acontecimiento instantáneo que ocurre en una observación de clase en vivo.”

Los resultados reportados logran dar cuenta del objetivo de este trabajo, esto es, reconocer y caracterizar el desarrollo de habilidades vinculadas con la competencia de *noticing* en futuros profesores que analizan videos de sus propias clases simuladas. Dichos resultados se enmarcan en un contexto educativo particular en el que se promueve el desarrollo de habilidades vinculadas con *noticing*, incluso antes de la observación del video. El estudio realizado, centrado en dos futuras profesoras, no permite establecer generalizaciones; sin embargo, ofrece información importante para realizar nuevas preguntas. Por ejemplo, ¿qué ocurrió con los otros futuros profesores participantes en el mismo contexto? Si consideramos los nueve informes presentados en el año 2019, ¿qué diferencias y similitudes se hacen evidentes al contrastarlos? O ¿qué diferencias y similitudes se hacen evidentes en los informes de un mismo grupo al observar su clase o la de otro grupo?

“La observación del video y la escritura sobre lo observado permite una reflexión crítica fuera de la propia aula que promueve la toma de consciencia sobre lo que acontece en su interior y posibilita proponer ideas para producir cambios en la propia práctica.”

Finalmente, se destaca que, a pesar de las limitaciones de los resultados de este estudio por tratarse de un estudio de caso, lo reportado pone en evidencia la sinergia entre la observación de videos de clases y el desarrollo de la competencia de *noticing*, y en este sentido, es consistente con resultados de estudios desarrollados en otros contextos de formación docente y llevados adelante con otras metodologías de investigación.

 ISSN 2422-5975, en línea

Agradecimientos

Este estudio se desarrolló con financiación de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Córdoba y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Agradecemos a la Lic. Silvina Smith por las revisiones realizadas a este artículo, y a nuestras estudiantes por permitirnos el uso de sus informes e imágenes del video de su clase simulada.

Referencias

Achilli, E. (2008). *Investigación y formación docente*. Rosario, Argentina: Laborde.

Becerril, M., Etchemendy, M., Parra, C., Ponce, H., Quaranta, M. E., Sadovsky, P., Tarasow, P. y Zilberman, G. (2015). *Analizar clases de matemática. Una herramienta de estudio para la formación Docente*. Ministerio de Educación. Instituto Nacional de Formación Docente. https://cedoc.infd.edu.ar/wp content/uploads/2020/01/1_1.MATEMATICA PRIMARIA_2015_1.pdf Recuperado el 17 de marzo de 2021.

Buchbinder, O. y Kuntze, S. (2018). Representations of practice in teacher education and research – Spotlights on Different Approaches. En O. Buchbinder y S. Kuntze (eds.). *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (pp. 1-8). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70594-1_1

De Paula, E. F., Rodrigues, R. V. R., Rodrigues, P. H. y Cyrino, M. C. C. T. (2021). A formação de professores que ensinam matemática: 17 anos de pesquisas do Gepefopem. En E. F. De Paula y M. C. C. T. Cyrino (eds.). *Contextos formativos de professores que ensinam matemática* (pp. 161-204). São Paulo: Pimenta Cultural.

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (eds.). (2018). *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (Fifth Edition). Thousand Oaks: SAGE.

Groenwald, C. L. y Llinares, S. (2019). Competencia Docente de Observar con Sentido Situaciones de Enseñanza. *Paradigma*, 40(1e), 29-46.

Hollingsworth, H. y Clarke, D. (2017). Video as a tool for focusing teacher self-reflection: supporting and provoking teacher learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(5), 457-475.

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development. En K. Krainer y T. Wood (eds.). *Participants in mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks* (Vol. 3, pp. 309-330). Rotterdam: Sense Publishers.

Karsenty, R. y Arcavi, A. (2018). Mathematics, lenses and videotapes: a framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(5), 433-455.

Llinares, S. (2012). Formación de Profesores de Matemáticas: caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 7(10), 53-62.

Males, L. M. (2017). Using Video of Peer Teaching to Examine Grades 6–12 Preservice Teachers' Noticing. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 91-109). Cham: Springer.

Mason, J. (1991). Epistemological foundations for frameworks which stimulate noticing. En R. Underhill (ed.), *Proceedings of PME-NA 13* (Vol. 2, pp. 36-42). Blacksburg, VA: Virginia Tech.

Mason, J. (2009). Teaching as disciplined enquiry. *Teachers and Teaching: theory and practice* 15:2, 205-223. http://dx.doi.org/10.1080/13540600902875308

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., y Pazuch, V. (2018). O uso de vídeos em um processo formativo sobre o ensino de álgebra. En R. S. R. Silva (org.). *Processos formativos em educação matemática: perspectivas filosóficas e pragmáticas* (pp. 183-211). Porto Alegre, RS: Editora Fi.

Schack, E. O., Fisher, M. H. y Wilhelm, J. A. (eds.). (2017). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks*. Cham: Springer.

Sherin, M., y Dyer, E. (2017). Mathematics teachers' self-captured video and opportunities for learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(5), 477-495.

Star, J. R. y Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 107-125.

Vogler, A.-M. y Prediger, S. (2017). Including students' diverse perspectives on classroom interactions into video-based professional development for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(5), 497-513.

Anexo

Análisis del propio video del primer simulacro

Una de las actividades realizadas antes del primer simulacro fue la confección, por parte de ustedes, de un listado de cuestiones a observar, que fue luego socializado con el resto de la clase y ampliado con los aportes de los compañeros. Asimismo, las devoluciones de los docentes les permitieron completarlo. No obstante, colocamos a continuación algunas preguntas que les puedan servir de guía para observar su presentación y avanzar con una breve crítica a lo hecho:

1. ¿Qué, de mi presentación, me pareció muy bueno?
2. ¿Qué recorte, del problema completo o su resolución, hice para la presentación?
3. Ese recorte, ¿resultó pertinente para el curso al que iba destinado y a los tiempos disponibles?
4. ¿Qué dejé afuera en el recorte y en la presentación?
5. Lo que explico, ¿lo explico bien desde lo matemático?
6. ¿Cómo respondo las dudas que me plantean?
7. Los recursos empleados para la presentación, ¿fueron adecuados y todos pudieron ver o acceder a los mismos?
8. ¿Me autorreferencié muchas veces?, esto es, dije varias veces: "yo creo...", "yo hice...", "yo pensé..."
9. ¿Usé muletillas (palabra o gesto que repite varias veces)? ¿Con qué frecuencia?
10. ¿Me desplacé frente al pizarrón y/o en el curso?
11. ¿Se podía escuchar bien lo que yo decía?
12. ¿Miré y trabajé solo con un grupo de estudiantes?

Si trabajaron de a dos, ¿en la presentación se distribuyeron de manera pareja el tiempo y el tipo de intervenciones?

Al final de ese texto consigne cuatro cuestiones sobre las que cree debe continuar trabajando.

Una dificultad del oficio docente en el marco de la reestructuración del sistema de enseñanza en Educación de Jóvenes y Adultos

Educación permanente de jóvenes y adultos. Fotografía en entrevista a Gladys Blazich, https://medios.unne.edu.ar/

Nicolás Gerez Cuevas

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Nicolás Gerez Cuevas

Doctor en Ciencias de la Educación, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Profesor de Matemática, Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FAMAF – UNC). Becario posdoctoral de CONICET. Profesor del Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FAMAF-UNC), desempeñándose en la formación de profesoras y profesores de matemática. Forma parte del grupo de investigación que se organiza en el marco del proyecto "Estudiar prácticas educativas y materiales de enseñanza de la matemática", con subsidio y aval de SECYT-UNC. Ha estudiado la complejidad de la enseñanza de la matemática a jóvenes y adultos. Actualmente sus actividades de investigación están orientadas al estudio de la formación de maestras y maestros a partir del trabajo colaborativo con profesores de matemática.

Una dificultad del oficio docente en el marco de la reestructuración del sistema de enseñanza en Educación de Jóvenes y Adultos

A difficulty in teaching work in the context of the restructuring of teaching system in YAE

Nicolás Gerez Cuevas *

Fecha de recepción: 30 de Marzo 2021
Fecha de aceptación: 12 de Mayo 2021

RESUMEN

En este artículo, presentaremos hallazgos de una investigación en la que indagamos sobre la complejidad de la enseñanza en clases ordinarias de nivel primario en las condiciones singulares que implica la modalidad de Educación de Jóvenes y Adultos (EDJA). En primer lugar, presentamos la perspectiva sostenida sobre el trabajo docente en torno a las dificultades del oficio. Luego, desarrollamos algunos aspectos del proceso que denominamos ***reestructuración del sistema de enseñanza en EDJA***, como condición institucional estructural de la problemática abordada. Posteriormente, desarrollamos un análisis de aspectos que nos permiten sostener como ***dificultad del oficio*** a cuestiones vinculadas a la actividad de planificación, y más puntualmente, a la ***situación de construcción*** de una secuencia de enseñanza en torno a un recorrido global. Advertimos algunas tensiones en los modos de resolver el problema de la articulación de actividades de forma tal de favorecer la construcción progresiva de conocimientos matemáticos, en el marco de las condiciones de la modalidad, a partir de la apropiación de regulaciones sobre la enseñanza.

palabras clave

educación de jóvenes y adultos · oficio docente · planificación enseñanza de la Matemática · problemáticas de enseñanza

Contacto

*gerez@famaf.unc.edu.ar

ABSTRACT

In this article results of an investigation about teaching in primary-level common classes in the YAE (Young and Adult Education) modality are presented. First, a theoretical perspective on ***difficulties in teaching work*** is presented. Then, some aspects of the process called ***restructuring of teaching system in YAE***, as a structural institutional condition of teaching work, are developed. Subsequently the planning activity is analysed as a ***difficulty in teaching work*** and more specifically, the ***construction situation*** of building a teaching sequence around a content. Some tensions in ways of solving the problem of articulating activities in such a way as to promote the progressive construction of mathematical knowledge, within the framework of the conditions of the modality, are noted. This tension is in relation with the appropriation process of regulations on teaching.

keywords

adult and youth education · teaching work · planning
mathematics education · difficulty in teaching work

Comprender el trabajo docente a través de las dificultades del oficio

Este artículo presenta hallazgos de una investigación[1] (Gerez Cuevas, 2020) en la que indagamos sobre la complejidad de la enseñanza en clases ordinarias[2] de nivel primario en los escenarios singulares de la modalidad de Educación de Jóvenes y Adultos (EDJA). Su objetivo fue estudiar el modo en que se articulan conocimientos docentes, prácticas de enseñanza de saberes matemáticos y condiciones de las prácticas docentes en el trabajo de maestras con trayectorias cortas en la modalidad, en distintos contextos institucionales en la provincia de Córdoba.

Este trabajo de investigación se sustentó en un *enfoque teórico multirreferencial* (Ardoino, 1993). Por ello, se articuló una mirada didáctica a partir de aportes de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y de la teoría de situaciones didácticas, con otras contribuciones teóricas del campo de las ciencias de la educación. Particularmente, diversos puntos de vista a los que se acudió en este estudio permitieron inscribir la problemática de la enseñanza en una dimensión institucional vinculada al marco

1 Tesis de Doctorado en Ciencias de la Educación titulada "La enseñanza de la matemática en el nivel primario de la modalidad de Educación Permanente de Jóvenes y Adultos: Saberes docentes, prácticas y condiciones institucionales", dirigida por la Dra. Dilma Fregona y co-dirigida por la Dra. Fernanda Delprato. La investigación fue financiada con becas de FONCyT y CONICET y se enmarcó en los siguientes subsidios de investigación: i) SECYT-UNC: "Estudiar prácticas educativas y materiales de enseñanza de la matemática" (2018-2021, Res. 472/18), "Estudiar prácticas de enseñanza y usos de la matemática destinados al trabajo docente" (20162017, Res. 202/16 y 313/16), "Estudiar y documentar prácticas de enseñanza y usos de la matemática para la formación de docentes" (2014-2015, Res. 203/14), ii) Proyecto PICT-FONCYT 2016-2081 "Prácticas educativas con jóvenes y adultos: políticas, sujetos y conocimientos" (2018-2021) y PICT-FONCyT-2011-0857 "Desarrollo profesional de docentes o futuros docentes en matemática: indagaciones, perspectivas y desafíos en diferentes escenarios" (2012-2015).

2 Esta expresión es usualmente utilizada en didáctica de la Matemática para referirse a clases en las que las decisiones sobre su diseño o puesta en marcha no son comandadas o intervenidas por la investigación, en contraposición a aquellas clases que se vinculan con ingenierías didácticas.

de las regulaciones propias de la escolaridad. Esto permitió el reconocimiento de nudos problemáticos de la articulación entre saber de la transmisión y práctica docente, en el marco de condiciones específicas de trabajo docente. Para alcanzar los objetivos de la investigación, se ha desarrollado una estrategia de indagación que ha articulado entrevistas semiestructuradas con tres maestras que se desempeñaban en distintas instituciones de la modalidad, observaciones de clases y análisis de documentos de políticas educativas en la EDJA.

Una herramienta proveniente de la TAD que nos permite un tratamiento didáctico de cuestiones que emergen en la enseñanza habitual es la idea de *dificultades del oficio* (Chevallard, 2013b; Chevallard y Cirade, 2010). La noción apunta a que los inconvenientes, obstáculos o impedimentos que los/as docentes enfrentan en la realización de las tareas implicadas en su trabajo sean concebidos de un modo que trascienda a la actuación individual. De este modo, las *dificultades del oficio* son una manifestación de la falta de recursos colectivos para abordar los distintos tipos de tareas que conforman el quehacer docente. Chevallard cuestiona además que entre quienes practican el oficio y en su *noósfera*[3] hay quienes se apresuran a ignorarlas, concibiendo que derivan de condiciones contingentes o de la incompetencia de un profesor. Por ello, propone como criterio mirar todo inconveniente observado en el ejercicio de la actividad docente –salvo excepción– como una *dificultad del oficio*.

El ejercicio del oficio requiere que, ante las dificultades encontradas, los/as profesores/as construyan algún tipo de respuesta. La noción se vincula con un cuestionamiento a que, en las condiciones actuales de los sistemas de enseñanza, dicha construcción se restringe a nivel de la capacidad de innovación de cada individuo aislado en su práctica personal:

> Pero entre las dificultades efectivamente reconocidas, pocas "se plantean como problema" fuera del círculo restringido de las personas del oficio aisladas cada una en su práctica personal, que la cultura tradicional del oficio lleva a creer que ellas deben responder por sí mismos, sin otra ayuda que su "inventiva", su "talento", etc., a las cuestiones que el ejercicio del oficio les hace encontrar. Todo sucede como si el profesor viviera su profesión como trabajador independiente, ese personaje que se llama en inglés freelancer o freelance. (Chevallard, 2013b, p. 6)[4]

Por contraposición a esta situación, Chevallard afirma que el reconocimiento de estas dificultades, su transmutación en cuestiones, la construcción de respuestas y el control de la validez y del valor de estas son tareas que pertenecen, por definición, a la noósfera del oficio. Pero un problema principal de los sistemas de enseñanza es justamente la impotencia actual de estas instancias para identificar las problemáticas que enfrentan los/as docentes y aportar respuestas adecuadas a las preguntas que se derivan de ellas. Por el contrario, profesionalizar la docencia implica asumir las *dificultades del oficio* de profesor como verdaderos *problemas de la profesión*, cuya resolución exige tanto investigaciones adecuadas como la elaboración y difusión de recursos materiales y de conocimiento (Ruiz Olarria, 2015).

Recuperamos la necesidad de situar estas cuestiones en un nivel colectivo en el que se deben reconfigurar los resultados de la investigación didáctica, pero desde nuestro punto de vista, los/as docentes deben estar incluidos en la definición y en el tratamiento de los propios problemas de la profesión. En nuestra investigación, asumimos una perspectiva que reco-

3 En la teoría de la transposición didáctica, la noósfera es la esfera donde se piensa el funcionamiento didáctico, especie de tamiz por donde se opera la interacción entre el sistema y la sociedad.

4 La traducción desde el texto original es nuestra.

noce el saber docente de los/as maestros/as como ineludible para comprender las dificultades del oficio. Por ello, identificamos una serie de problemas que consideramos nodales, los analizamos en el marco de la articulación entre condiciones y saberes docentes y describimos e interpretamos parte de las prácticas de las docentes como respuestas construidas a estas dificultades. Una alternativa que profundiza el énfasis en las acciones y los significados de los "prácticos" y produce nuevos conocimientos sobre los problemas que enfrenta la profesión docente es la perspectiva sobre el trabajo colaborativo entre investigadores y docentes (Bednarz, 2013). Este tipo de escenarios podría situarse como alternativa para elaborar respuestas, al resignificar y recontextualizar los aportes de la investigación didáctica y superar el aislamiento que supone el modo usual de concebir la profesión docente.

En relación con las condiciones institucionales en las que se enmarcan las problemáticas de enseñanza identificadas, destacamos un proceso estructural en la modalidad de EDJA que presentaremos a continuación.

> *"Profesionalizar la docencia implica asumir las dificultades del oficio de profesor como verdaderos problemas de la profesión, cuya resolución exige tanto investigaciones adecuadas como la elaboración y difusión de recursos materiales y de conocimiento."*

La reestructuración del sistema de enseñanza en EDJA

Conceptualizamos las transformaciones operadas en la EDJA –a partir de su definición como modalidad en la Ley de Educación Nacional (26.206) en 2006– como un proceso de reestructuración del sistema de enseñanza, teniendo en cuenta la conformación de una noósfera diferente a la del sistema escolar regular, que a su vez define regulaciones sobre el trabajo docente que apuntan a una diferenciación explícita con aquellas vigentes en la escolaridad obligatoria. En documentos de política educativa se afirma un discurso que apunta a la definición de un proyecto pedagógico para la EDJA que reconozca que "las necesidades de los adultos que asisten a estos servicios son cualitativa y cuantitativamente diferentes a las de los niños y adolescentes". (MECyT, 2008).

En diferentes documentos de política pública se explicita una mirada reprobatoria sobre la enseñanza en la EDJA basada en tradiciones vigentes en la escolaridad regular:

> Las políticas que se implementaron a lo largo de más de un siglo, en general no favorecieron el reconocimiento de la especificidad y complejidad de la Educación de Adultos y se sostuvo la pretensión de equipararla pedagógicamente con los niveles del sistema educativo destinados a niños y púberes. (...) Ello contribuyó a que se identifique socialmente a esta modalidad como una educación de menor jerarquía (CFE, 2010a, p. 3)
>
> En la definición de un currículo para la EDJA optamos por un enfoque del aprendizaje basado en el desarrollo y construcción de capacidades, por considerar que es una alternativa válida para dar sentido a la educación de jóvenes y adultos, superadora de una estructura escolarizada centrada en el enciclopedismo o en el logro de competencias. (CFE, 2010b, p. 12)

 ISSN 2422-5975, en línea

Se plantea como categoría central la noción de "capacidades", que orienta la enseñanza hacia una relación estrecha de las disciplinas escolares y los saberes que se enmarcan en estas producciones con el contexto social, con el fin de potenciar el hacer de los sujetos:

> Comprender al aprendizaje en términos de capacidades esperables, implica relacionar y ligar los conocimientos con prácticas sociales que se caractericen por ser socialmente productivas, políticamente emancipadoras, culturalmente inclusivas (Cullen: 2009) y ecológicamente sustentables. Con esta opción no se rechazan ni los contenidos ni las disciplinas sino que se enfatiza que deben estar supeditados a la construcción de conocimientos contextualizados y en situaciones cercanas a la vida de los estudiantes, en pos de generar cambios individuales y comunitarios, personales y sociales. El saber se valora en función de la posibilidad que brinda de intervenir en diferentes situaciones y contextos. (CFEb, 2010, p. 12)

En esta mirada, pueden encontrarse algunos puntos en común con otras perspectivas sobre la enseñanza de las matemáticas que también cuestionan aspectos del sistema de enseñanza vigente. A partir de los aportes de una mirada teórica sostenida por los desarrollos de la didáctica de la Matemática, analizamos la reestructuración del sistema de enseñanza en la EDJA como un modo singular de dar respuesta al problema más general de la *alienación social de la escuela* (Gascón, 2011). Esta noción retoma lo desarrollado por Chevallard (1991) en la teoría de la transposición didáctica sobre la frecuente incompatibilidad del sistema de enseñanza con su entorno y la necesidad de responder a las demandas por su actualización. Uno de los aspectos que Gascón presenta para describir la alienación social es el olvido de la *razón de ser* de los saberes enseñados y una consecuente pérdida de su funcionalidad. Así, se describe un fenómeno didáctico de largo alcance y dominante en los actuales sistemas de enseñanza que ha sido denominado *monumentalismo* por Chevallard (2013a). Esto refiere a que las obras estudiadas son como monumentos formales que se visitan, se contemplan, se admiran y con los que deberíamos gozar, sin preguntarnos por qué están allí donde están. Para este autor, así se reproduce una diferenciación social por la cual las élites están llamadas a estudiar las obras del currículo elitista con el fin de vivir con ellas, mientras que el pueblo es invitado a visitar, en general muy rápidamente, esas mismas obras con las que tendrán después una relación limitada y pobre.

> *“En la definición de un currículo para la EDJA optamos por un enfoque del aprendizaje basado en el desarrollo y construcción de capacidades, por considerar que es una alternativa válida para dar sentido a la educación de jóvenes y adultos, superadora de una estructura escolarizada centrada en el enciclopedismo o en el logro de competencias.”*
>
> *(CFE, 2010b, p. 12)*

Gascón (op. cit.) considera que la superación del fenómeno del monumentalismo está en la base de todas y cada una de las reformas educativas. Este problema es formulado del siguiente modo:

> ... ¿cómo conseguir que los estudiantes interioricen e integren los conocimientos, habilidades y destrezas, actitudes y valores, y los transformen en conocimientos personales, flexibles y operativos (funcionales)? ¿Cómo conseguir que activen dichos conocimientos para diseñar y poner en marcha estrategias complejas que les permitan resolver los problemas de todo tipo que se les presentan en su vida académica, profesional, personal y social? (Gascón, 2011, p. 10)

Desde este punto de vista, podemos interpretar que diferentes aspectos presentados en torno a la reestructuración del sistema de enseñanza en EDJA pueden concebirse como respuestas parciales y singulares *al problema del monumentalismo* en la enseñanza, es decir, la pérdida progresiva de sentido y de funcionalidad que sufre el saber transmitido en las escuelas. Sin negar los aspectos específicos de los procesos históricos y de las definiciones concretas de las políticas educativas para la EDJA que trascienden a este problema, nos interesa poder enmarcar este proceso en el marco de intentos más amplios de transformación de los sistemas de enseñanza.

Diversas tradiciones de investigación y de desarrollo en el campo de la educación matemática apuntan a la pérdida de sentido de la matemática enseñada, y en algunos casos, proponen orientaciones para su superación. En particular, la teoría de situaciones didácticas propone una conceptualización de la enseñanza en la que el aprendizaje se construye en la adaptación a un medio antagonista, en un tipo de actividad matemática que integra el sentido de los saberes involucrados. Brousseau (2000) reconoce que otros modos de enseñanza, basados en un aprendizaje de tipo "behaviorista", también apelan a un sentido del conocimiento; pero en esos casos, el sentido de lo aprendido es exterior al proceso de adaptación, y no le podrá ser dado sino después, a través del uso, es decir, en el horizonte de una "aplicación" futura.

> *"Podemos interpretar que diferentes aspectos presentados en torno a la reestructuración del sistema de enseñanza en EDJA pueden concebirse como respuestas parciales y singulares al problema del monumentalismo en la enseñanza, es decir, la pérdida progresiva de sentido y de funcionalidad que sufre el saber transmitido en las escuelas"*

Sadovsky (2018) cuestiona la oposición entre la acción y el saber que se explicita en algunos discursos político-pedagógicos,[5] a partir de la cual se da a entender que es el recorte centrado en una disciplina el que necesariamente inhabilita la posibilidad de enfrentar a los/as estudiantes con problemas que los/as ayuden a elaborar conocimientos. La autora destaca que esta producción de ideas es inseparable de los supuestos que se han asumido y de los procesos puestos en juego, y explicitar esta cuestión resulta central para una comprensión profunda sobre qué significa conocer. En este sentido, cuestiona formulaciones

5 Sadovsky discute puntualmente con la perspectiva explicitada en el documento "Marco Nacional de Integración de los Aprendizajes: hacia el desarrollo de capacidades" producido por el Ministerio de Educación y Deportes en 2017.

que se plantean aisladas de los procesos que las harían posibles, y de manera independiente de los problemas, las áreas de conocimiento y las perspectivas desde las que se abordan las cuestiones:

> Es en este contexto que resulta central problematizar los vínculos entre el trabajo en cada campo disciplinar –sus problemas, sus formas de producción, sus herramientas teóricas, sus modos de establecer la verdad– y el estudio de problemáticas cuyo abordaje se vería enriquecido con la confluencia de los aportes de diferentes disciplinas. Qué se necesita saber de cada campo específico para sostener el estudio de un problema complejo con los jóvenes de la escuela y hasta qué punto ese estudio permitirá volver de una manera productiva sobre cuestiones específicas de las disciplinas implicadas, son preguntas centrales que los profesores necesitarán formularse. (Sadovsky, op.cit., p.26)

Sobre esta base teórica, recuperamos algunas advertencias sobre el peligro de trivialización de la problemática didáctica en algunas respuestas específicas que en la noósfera de la EDJA (aunque también se pueden reconocer similitudes en la escolaridad regular) se proponen para el problema del *monumentalismo.* En algunas de estas propuestas, la cuestión de la *razón de ser* se reduce a la identificación de usos específicos de los saberes en contextos sociales o en problemáticas en diversos campos de actividad a posteriori de su transmisión, pero no se aborda la cuestión de la construcción de su sentido como emergente de la actividad matemática. De un modo próximo al aprendizaje "behaviorista" que cuestiona Brousseau más arriba, el sentido es exterior al proceso de adaptación. Aunque resulta destacable la relevancia de recuperar preguntas genuinas como un modo de proponer una posible *razón de ser* de los saberes, se plantea una limitación en tanto no se explicitan pautas para la organización de modos de estudiar que posibiliten su disponibilidad ante el requerimiento de su uso. Es decir, se convoca a un uso o una aplicación relevante del conocimiento matemático, pero a partir de cierta trivialización de la complejidad de la comunicación del saber matemático.

En síntesis, desde nuestro punto de vista, cualquier abordaje para abordar *el problema del monumentalismo* que implique poner en juego nociones matemáticas en el estudio de algún sistema, fenómeno o realidad, se puede sostener en un entramado de saberes y prácticas propias de la disciplina que le den sentido. Para ello se requieren procesos de estudio sostenidos en los que los/as estudiantes participen de una actividad de producción de conocimientos matemáticos.

¿Cómo sostener un proceso de estudio de la matemática de estas características en el marco de las condiciones singulares en que se desarrolla el trabajo docente en la modalidad de EDJA? Producto de una débil institucionalidad para acompañar el trabajo de enseñar matemática, el cómo construir una propuesta didáctica que promueva condiciones favorables para el aprendizaje y que se adapte a las demandas del proceso de reestructuración en EDJA se plantea en las condiciones institucionales actuales como problema de exclusiva resolución en el ámbito "doméstico" de los/as docentes. Por esta delegación de aspectos centrales del problema de la enseñanza, afirmamos que el proyecto social que supone la formación matemática de los/as estudiantes queda parcialmente informulado en estas condiciones institucionales, ya que no se materializa en herramientas que orienten a los/as profesores/as en relación con algunos de los desafíos a los que se enfrentan.

A continuación, analizaremos algunos aspectos de la manera en que se expresa este fenómeno a nivel del cotidiano del trabajo docente, particularmente en relación con la *situación de construcción* de recorridos de estudio.

Reestructuración del sistema de enseñanza y apropiación de saberes

Desde los aportes de perspectivas etnográficas, podemos reconocer que en el proceso mismo del trabajo se construye un *saber docente* como un conocimiento local integrado a la práctica (Rockwell, 2009). Este conocimiento local se construye en la relación entre las biografías particulares de cada docente y la historia social e institucional que les toca vivir. El saber docente constituye una matriz que reelabora la formación inicial y continua de los/as docentes y las disposiciones oficiales que llegan a la escuela, ya que la resolución cotidiana de qué enseñar y cómo hacerlo supone no sólo la reproducción sino la integración y generación de conocimiento por parte de quienes ejercen ese oficio. Es en la propia resolución del quehacer cotidiano que los/as docentes resignifican experiencias y saberes de origen histórico diverso (Mercado, 2002). Esto supone concebir la apropiación de nuevas propuestas pedagógicas como un proceso que tiene lugar en el contexto de su uso para la realización cotidiana de la enseñanza, comprendiendo que dichas propuestas son transformadas en su aplicación. Así, los/as docentes producen los saberes prácticos necesarios para hacer de los nuevos recursos herramientas para realizar su trabajo.

En tal sentido, el discurso que sostienen las regulaciones construidas en el marco del proceso de reestructuración del sistema de enseñanza es apropiado por las maestras de nuestro referente empírico en diálogo con otros saberes docentes y en relación con las necesidades que se expresan en el trabajo cotidiano. En el marco de las entrevistas semiestructuradas emergieron algunas enunciaciones que dan cuenta de aspectos de este proceso de apropiación. Así, por ejemplo, la maestra María[6] afirma que, a diferencia de la escuela común, en la modalidad se trabaja "la realidad total". Aunque resulta ambigua la expresión, puede vincularse con la advertencia de la docente de que hay una discusión con una tradición curricular en la que el límite entre "lo escolar" y "lo extraescolar" es más fuerte:

> Lo que pasa es que en adultos uno trabaja más la realidad total. En niños te enfocás mucho más en la propuesta curricular. Si bien acá nosotros nos enfocamos en el diseño curricular porque la primaria de adultos tiene un diseño curricular, pero siempre partimos de alguna problemática, en la que ellos están relacionados. (...) con adultos uno tiene que tratar de que ellos entiendan el lugar en el que están. (CasoM-Entrevista5-2015-051-4)

"Lo que pasa es que en adultos uno trabaja más la realidad total. En niños te enfocás mucho más en la propuesta curricular. Si bien acá nosotros nos enfocamos en el diseño curricular porque la primaria de adultos tiene un diseño curricular, pero siempre partimos de alguna problemática, en la que ellos están relacionados. (...) con adultos uno tiene que tratar de que ellos entiendan el lugar en el que están."

(CasoM-Entrevista5-2015-05-14)

6 Los nombres son ficticios para garantizar el anonimato de las referentes de nuestra investigación.

 ISSN 2422-5975, en línea

Por su parte, Cecilia destaca la relevancia de la tarea de gestión curricular que implica la selección de los contenidos de la enseñanza, distinguiendo de algún modo entre saberes relevantes y no relevantes para los sujetos. Esto se expresa en su idea de priorizar la selección de aquellos que sean "funcionales" desde una perspectiva de utilidad de los saberes, por oposición a contenidos de cultura general. También se pusieron en juego en las entrevistas nociones que dan cuenta de maneras de comprender el aprendizaje:

> Pero tampoco sé cómo se da. Sí que los contenidos de primaria de adultos tienen que ser más funcionales, realmente que les sirvan para algo, de eso sí estoy convencida. Obviamente hay cosas que te sirven para cultura general, para hablar mejor, pero el grueso de los contenidos que a ellos les sirva para posibilitar, darles otras opciones, o posibilitarles otras instancias de aprendizaje. (CasoC-Entrevista11-2015-05-12)

"Cecilia destaca la relevancia de la tarea de gestión curricular que implica la selección de los contenidos de la enseñanza, distinguiendo de algún modo entre saberes relevantes y no relevantes para los sujetos. Esto se expresa en su idea de priorizar la selección de aquellos que sean "funcionales" desde una perspectiva de utilidad de los saberes, por oposición a contenidos de cultura general."

> Entrevistador: –¿Qué sería "aprender bien"?
>
> Cecilia: –Cuando le sirve para solucionar alguna situación de su vida cotidiana. Si esta persona va y paga con esto y puede darse cuenta de que le dieron bien o mal el vuelto, entonces aprendió, aprendió a sumar y aprendió a restar. Y aprendió bien. Cuando te sirve para otras instancias que trascienden lo escolar. (CasoC-Entrevista12-2015-05-26)

La situación de construcción como dificultad del oficio docente en EDJA

El trabajo de enseñar matemática en la escuela implica una serie de tareas que exceden a la gestión en el momento de la clase. En el marco de la teoría de situaciones didácticas, esta complejidad de la actividad docente ha sido conceptualizada a partir del modelo teórico de la *estructuración del medio* creado por Brousseau (1988) y luego extendido por Margolinas (2002). Este constructo permite analizar las posiciones y las posibles interacciones del alumno y del profesor ante diferentes *medios*.[7] En particular se reconocen dos posiciones del profesor propias de la actividad de planificación: la *situación de proyecto*, localizada en torno a pocas sesiones y orientada a decisiones de preparación y gestión de las clases, y la *situación de construcción* de un proyecto de enseñanza en torno a un recorrido cognitivo global. En este artículo queremos poner la mirada sobre esta última situación, en tanto advertimos algunas tensiones en los modos de resolver el problema de cómo

7 Brousseau en el modelo original estableció cinco situaciones imbricadas (una situación es el medio con el que un sujeto interactúa en otra situación) para el alumno y dos para el profesor. Margolinas incluyó tres nuevas situaciones para el profesor. De este modo, son cinco las posiciones en las que actúa: al observar el trabajo de los/as estudiantes, al interactuar en clase, al proyectar una clase, al planificar un recorrido y al atender las ideologías de quienes producen discursos y proponen decisiones sobre el sistema educativo.

articular las actividades de los/as estudiantes de forma tal de favorecer la construcción progresiva de conocimientos matemáticos, en el marco de las condiciones institucionales en las que se desarrolla actualmente la enseñanza en la escuela primaria de la Educación de Jóvenes y Adultos (EDJA). Por ello definimos a la *situación de construcción* de dichos recorridos de estudio como *dificultad del oficio docente* en la modalidad.

Interpretamos como una importante condición en la situación de construcción el hecho de que, a partir de diversas regulaciones sobre la enseñanza y la propia construcción del saber docente, se promueven estrategias que evitan secuenciar la enseñanza de manera similar a las desarrolladas en tradiciones en la escolaridad infantil, estructuradas usualmente a partir de la progresión de contenidos. A partir de la voz de la maestra Cecilia podemos reconocer cómo se constituye una tensión en la articulación entre regulaciones institucionales y decisiones sobre la enseñanza, alrededor de la *situación de construcción*. La docente refiere aquí a que, debido a sus decisiones, el estudio de las matemáticas se organiza de un modo no secuenciado. Esto implica un problema de organización del trabajo:

> El otro día cuando [la directora y la vicedirectora] me revisaron la carpeta, me dijeron que no había como una secuencia lógica. Y es la misma impresión que yo tengo, porque no voy enganchando este tema, lo sucede el otro, lo sucede el otro, lo sucede el otro. (CasoCEntrevista42014-10-09)

> Yo también siento que no tengo como una progresión en lo que voy dando. Tampoco sé cómo hacer, tampoco sé mucho cómo organizarme. (...) Cómo organizarme, cómo planificar, qué doy primero. (CasoCEntrevista32014-09-12)

De algún modo se plantea una tensión entre el responder a las temáticas que se van trabajando y la cuestión de los contenidos que curricularmente se prescriben como objetos de enseñanza. En tal sentido, expresa la docente cierta contradicción entre lo proyectado a principio de año como parte de los contenidos de enseñanza que conforman su planificación anual y lo que logra concretar como actividades de enseñanza. Esta problemática parece haber sido identificada en un espacio de formación continua, ya que, según lo expresado, fue una temática de discusión en ese espacio, por lo que concebimos que es un indicio de que esta cuestión no resulta una dificultad individual o aislada, sino una problemática más general:

> Cuando vimos en el postítulo, me decían que marque en mi planificación [anual] qué di y qué no di, que lo marque con color para que ellas puedan ver. En realidad, yo sé que tengo muchos contenidos puestos que yo sé que no voy a alcanzar a dar, pero es para moverme con cierta libertad. (...) Porque a veces me pasa y me pasaba, que yo dejo que la selección se haga sola. Es como que yo hago la planificación, y después digo "esto no, esto no...". Voy viendo, "ahora puedo dar esto"... Si puedo empalmar con la profe de Educación Física, con el tema de la salud, la alimentación, elijo ese tema y lo voy dando. Pero sí tendría que ajustar un poco más eso. (CasoCEntrevista32014-09-12)

Cecilia expresa una primera explicación sobre esta situación dando cuenta de ciertas restricciones propias de la modalidad vinculadas a la asistencia discontinua (en la modalidad es habitual que, debido a las condiciones vitales de las personas adultas, gran parte de ellas no concurra a la escuela cotidianamente e incluso por períodos prolongados). Así, concibe cierta inconveniencia de pautar secuencias que se supone que proyectan un recorrido de progresión de aprendizajes, si los/as estudiantes no pueden sostener dicho recorrido más que en algunas instancias. Se destaca que, por contraste, la docente expresa que en la escuela infantil sí desarrollaba un trabajo más secuenciado, y que este modo alternativo es

 ISSN 2422-5975, en línea

una manera de adaptarse a las condiciones y restricciones propias de la modalidad. En ese sentido, la maestra manifiesta como una práctica habitual la planificación de actividades individuales, sin continuidad temática necesaria de una secuencia a la siguiente clase:

> Yo la vez que he hecho como más secuenciado a mí no me ha servido. (...) Inclusive cuando traigo cosas, clases que me gustan, que me parecen más o menos lindas. [Una clase en la que]... vamos a trabajar con esto de la lectura, vamos a trabajar con la historia personal, para pasar a la historia argentina y la línea del tiempo, y todavía no lo he podido hacer porque ayer vinieron 2 o 3, después vinieron otras 3 diferentes. A mí no me sirve secuenciar. Me sirve más bien pensar una actividad, aunque sea larga, cortarla al momento y al otro día empezar a lo mejor con ese mismo tema o con otro. En la primaria [infantil] sí lo hacía más secuenciado. Yo decido hacerlo de esa manera porque a mí me queda... Volvieron a la semana y quedó el tema empezado [en el sentido de que queda sin conclusión]. (CasoCEntrevista112015-05-12)

Entonces, una de las estrategias que habitualmente despliega para intentar garantizar ciertos aprendizajes, teniendo en cuenta que no se desarrollan secuencias didácticas, es la recurrencia de contenidos de enseñanza. Como dice la docente:

> No doy muchas clases de lo mismo. Entonces vemos esta semana, un día numeración, después otros temas. Estamos viendo fracciones, ángulos, decimales, eso hemos visto esta semana, y después de un par de semanas vuelvo a dar numeración. (CasoCEntrevista42014-10-09)

La dificultad para planificar a partir de núcleos temáticos

Como anticipamos más arriba, la tradición escolar de secuenciación en base a la progresión disciplinar de contenidos se pone en tensión en EDJA. Una manifestación de esto es la jerarquización de la necesidad de la articulación interdisciplinaria o en torno a un núcleo temático. Cecilia y María se han apropiado de esta noción en tanto saber pedagógico que funciona como un modelo de la enseñanza deseable en la modalidad de EDJA, pero a la vez se reconocen con dificultades para su implementación sostenida.

Por una parte, Cecilia valora la cuestión del trabajo interdisciplinario a partir de ideas aportadas por una directora que ha funcionado para ella como referente en su proceso de formación en EDJA. Desde allí plantea la idea de elegir una temática de interés y relacionarla con las diferentes disciplinas en la planificación. A pesar de esta valoración positiva, un trabajo de tal tipo no parece ser sostenido debido a la complejidad de su organización:

> Esto que te decía de la seño de Villa Gutiérrez, que me dijo "no separes materia por materia, ver qué tema de su interés y empezar a relacionar", que no siempre he podido. (CasoCEntrevista2-2014-09-05)

> A veces sí he podido tomar un tema de su interés y ver cómo lo relacionaba. Otras veces he seguido... si estamos viendo las Ciencias Naturales, [estudiamos] seres vivos, funciones vitales, y un montón de clases de eso, de eso y nada más que de eso. Sí armé tema para el Mundial, generé un proyecto, y sí pude relacionar. Pero sinceramente con esto tampoco me he sentado...no me siento con tanto tiempo a ver qué hago. (CasoCEntrevista22014-09-05)

Por su parte, la maestra María adscribe a la idea de orientar la planificación hacia un abordaje interdisciplinario a partir de una temática de interés, como un modelo de la enseñanza deseable en la modalidad de EDJA. Sobre esta noción, valora positivamente los exámenes para acreditar la escolaridad primaria en el caso de estudiantes en condición de libres. Dicha secuencia de actividades, aunque fue elaborada como parte de un instrumento de evaluación, es tomada por la maestra como un referente para pensar la enseñanza:

> Este año la situación problemática planteada era "Las inundaciones de Sierras Chicas". Entonces, en base a eso trabajaron en Ciencias Naturales. Veían qué pasaba ahora con ese lugar, si había contaminación, si no había contaminación, si el agua era potable. Entonces ellos van leyendo cierta bibliografía o ciertos conceptos y después tienen que definir. Bueno, entonces van trabajando de la misma manera: cuál es el porcentaje..., cuál es la cantidad de agua que habían llevado..., trabajan de esa manera. Está bueno, buscan una problemática que está actualmente. (...) Trabaja con un núcleo temático. A partir de eso empieza a trabajar todas las áreas. (...) ¡Pero lo ideal sería, estaría muy bueno hacer algo así! Vamos a ver si lo hacemos. (CasoM-Entrevista6-2015-05-26)

María establece que esta forma de organización de la enseñanza podría funcionar como un modelo para la enseñanza en la modalidad. Pero de todos modos, reconoce la existencia de ciertas restricciones que dan cuenta de las dificultades para construir una planificación de actividades articulada en torno a esta idea. Como la maestra Cecilia, menciona el problema de la asistencia discontinua, que provoca que los/as estudiantes puedan "perder el hilo" de la articulación de una secuencia de actividades:

> Que a veces nosotros lo queremos hacer con Estefanía, pero no sé, nos resulta... se nos complica muchas veces porque la asistencia de los alumnos... Vos decís seguís un tema y a veces tenés que volver a retomarlo, o no vino una... Eso es lo que nos dificulta. Sería ideal trabajar con un núcleo temático y en base a eso poder sacar todas las áreas, sería lo "¡guau!", si lo podemos hacer en algún momento. Está la idea de hacer, pero nos cuesta un poco. (...) Lo hemos intentado hacer un montón de veces, pero cuesta el hecho de que no vienen todos, todos los días. Entonces ahí se va perdiendo el hilo. (CasoMEntrevista6-2015-05-26)

María menciona el problema de la restricción de tiempo disponible para la enseñanza. Desde su punto de vista, este tipo de organización de la enseñanza requiere de períodos largos en los encuentros en aula. En tal sentido, aquí se explicita que esta restricción favorece la apelación a otro tipo de actividades no secuenciadas, cuya gestión puede ser más sencilla, en tanto es más fácil acomodarlas en los escasos tiempos disponibles.

La planificación a partir de "temáticas emergentes"

Como respuesta a esta tensión, se relevan ciertos indicios de una tendencia a la fragmentación de los trayectos de estudio de las matemáticas, y por ende, cierto debilitamiento de la potencialidad de sostener la progresión en la construcción de aprendizajes en torno a saberes específicos. En el marco de las entrevistas realizadas, se logró identificar la articulación de actividades con "temáticas emergentes" como un modo concreto y usual que posibilita superar restricciones vinculadas a la dificultad para sostener secuencias didácticas. Esto refiere a que en los intercambios formales o informales entre docentes y estudiantes emergen algunos temas de interés que se proponen como contextos para el trabajo de ciertos saberes. En el caso de matemática, pareciera que esto es un modo recurrente de estudiar frecuentemente las diferentes operaciones aritméticas. Esto implica un tipo de trabajo en el que se superpone la *situación de construcción* con la propia *situación didáctica* (Margolinas, op. cit.). María explicita esta opción de planificación de enseñanza a partir de las "temáticas emergentes":

> Hay veces que planificás, pero salió otra cosa. Y bueno, trabajás en base a esa situación que se planteó en el momento. (...) Por ejemplo, el otro día estábamos en la novena de la Vir-

> gen, y el Padre hablaba de la recaudación que se había hecho. (...) ¿Cuánto se había recaudado? Habían ido muchas y yo también había ido ese día. "Si se recaudó $1500..."; "si en cada misa se recauda eso..." Bueno, y ahí empezaron a surgir situaciones problemáticas distintas. "¡Mirá toda la plata que se lleva el cura!" (Se ríe). Veíamos para qué se usa el dinero: arreglar la iglesia. Veíamos que: "si se necesitan $20.000, ¿le va a alcanzar con...?" Se parte de esas situaciones que ni siquiera estaban pensadas. Surgió y ellas tenían la necesidad de saber. Preguntaron por preguntar. "¿Qué les parece si hacemos los cálculos?" (CasoM-Entrevista2-2014-09-16)

También María comenta otras situaciones en las que se plantean actividades relacionadas con contextos de la economía doméstica o comunitaria. Así, comenta una actividad relacionada con el comercio, y otra, con el control de los gastos personales en los servicios básicos. Esta última labor es planteada como una demanda de los/as estudiantes, que además excede al trabajo estrictamente matemático:

> Hicimos pastelitos una vez, y teníamos que saber cuánta plata habíamos juntado. (...) Para comprar el agua o las cosas de limpieza, porque no recibimos, hacemos rifas o hacemos pastelitos. "Vendimos tantas rifas a tanto, ¿cuánto es el dinero que nos queda?". Son situaciones que no están planificadas pero que surgen en el momento. Entonces lo tenemos que hacer para que ellas sepan el dinero que tenemos. (CasoM-Entrevista2-2014-09-16)

> O vienen y te dicen: "Seño, ¡tengo que pagar la luz y vino el aumento de la luz un montón!". O el del gas, que pagaban 200 y vino 700. "¿Y cuánto más tengo que pagar? ¿Y por qué tengo que pagar más?". Y ahí empezamos a leer información de la boleta y ver cuánto más le cobraron, y a qué se debe; si le quitaron el subsidio, qué subsidio quitan. Hicimos la lectura de la boleta, que por ahí vos ves tantas cosas y no sabés qué es, también aprovechamos. Y ese día a lo mejor trajimos para trabajar otra cosa, múltiplos, y trabajamos en base a la boleta de la luz. (...) Pero bueno, son los intereses de ellos, si ellos te están preguntando es porque realmente quieren saberlo. (CasoM-Entrevista3-2014-10-30)

Entre uno de los contextos que se plantean, se destaca particularmente el uso del cajero automático como *práctica de numeracidad de dominio no escolar*. Este artefacto aparece mencionado en el diseño curricular de la modalidad, como parte de las expectativas de logro de los tres niveles pautados:8

> El hecho de trabajar con el cajero, además de saber el número, cuánto es lo que tenés disponible, cuánto es el saldo que te queda. (...) También lo hemos usado, enseñamos los pasos, para sacar. Incluso mostramos un recibo, y cuánto era lo que tenía, lo que extrajo y lo que le quedó. Es otra forma de poder enseñar las operaciones. ¿Qué saldo es el que tiene...? Fijarse los datos, sobre todo en matemática. Hay muchos datos que te sirven a la hora de... Las fechas, la cantidad, lo que sacaste, entonces ahí hay varias actividades que se pueden hacer. (CasoM-Entrevista2-2014-09-16)

Cecilia, por su parte, además de dar cuenta de otros ejemplos de este tipo de trabajo a partir de temáticas emergentes, explicita que, a menudo, los saberes que se requieren para la realización de las tareas propuestas no

8 En las expectativas de logro de la etapa de alfabetización matemática: "Al finalizar el período de alfabetización es muy posible que las personas ejecuten sólo algunos cálculos escritos según las convenciones escolares. Proponemos que ese proceso de apropiación se enriquezca además con: el aprendizaje de algoritmos básicos en la vida cotidiana, como los necesarios para utilizar un teléfono público o un cajero automático...". (MEPC, 2008, pp. 41-42)
En las expectativas de logro para los módulos 1 y 2: "... se espera que el alumno se aproxime a: (...) utilizar cajeros automáticos para hacer operaciones básicas (consulta de saldos, extracciones)...". (Ibíd., p. 68)
En las expectativas de logro para los módulos 3 y 4: "Al finalizar los módulos 3 y 4, es deseable que la persona pueda: (...) interpretar y decidir en consecuencia, la información para interactuar con cajeros automáticos, teléfonos, etc.". (Ibíd., p. 71)

están disponibles como repertorio de los sujetos. Por ello, debe generar otras tareas para la enseñanza de conocimientos más básicos.

> Porque en realidad te cuentan: "señorita, me enteré de un préstamo nuevo que da la Cristina [se refiere a la presidenta en ese momento]". Y yo busco algún problema más o menos con eso. Con los datos que me dan, me invento un problema. Pero a veces después me doy con la sorpresa que les estoy hablando de 1400 o 3000, y tampoco manejan esos números. Entonces tengo que dar actividades primero con números más chicos. (CasoC-Entrevista4-2014-10-09)

¿Los "cuadernillos" secuenciados como alternativa?

El trabajo en la modalidad de EDJA se enfrenta a una escasez de producción bibliográfica específica para la modalidad. En el marco de pensar alternativas para lidiar con el problema de la construcción de recorridos de estudio, plantea Cecilia que una opción podría ser el diseño de cuadernillos estructurados, en los cuales se diseñen con anticipación secuencias de actividades. Como lo expresa la docente, esta opción tensionaría la posibilidad de trabajar con las temáticas de interés emergentes, por lo que la considera una respuesta incompleta. De todos modos, en tanto considera que hay temáticas que emergen usualmente, imagina que puede desarrollar algún dispositivo que lo anticipe y lo tome como asunto de enseñanza:

> Sé que hay otras compañeras que hacen cuadernillos. Me gustaría poder hacerlo, pero nunca me senté y me puse a hacerlo. (...) Así como cuadernillo de actividades, como que ya esté todo... esté más secuenciado, primero enseño esto, después enseño esto... Si yo hago eso, no podría traer nada de lo que ellas me piden. (CasoC-Entrevista9-2014-12-11)
>
> Yo ya hace 5 años que estoy acá. Algunas cosas yo ya me doy cuenta de que van a salir. Esas cosas sí se podrían tenerlas listas de antemano. Algunos temas yo ya sé cómo hacerlos salir. (...) Yo sé que esos temas van a salir por la realidad que ellas tienen, del trabajo en negro, el tema de la identidad, la marginación. Eso sale. Prevención y cuidado de la salud. Son temas que a ellas les interesan. (CasoC-Entrevista9-2014-12-11)

También María destaca la posibilidad de construir recursos estructurados como una posibilidad para planificar la enseñanza, retomando los aportes del dispositivo de evaluación antes comentado:

> Están muy buenos los exámenes libres, están muy buenos. Para hacer cuadernillos, eso es una muy buena guía como para decir "hacemos de esta manera". (CasoM-Entrevista6-2015-05-26)

Dado que María y Cecilia no recurren actualmente a este tipo de dispositivos en su trabajo docente, sino que sólo lo evocan como una potencial respuesta, no profundizamos el análisis de sus alcances y limitaciones. Pero debido a las propias condiciones que hemos reconocido y la tensión con saberes sobre la enseñanza en EDJA que apuntan a la vinculación con las prácticas de numeracidad y los intereses vitales de los/as estudiantes, entendemos que ante cualquier alternativa que se oriente por el diseño y el uso de este tipo de recursos, se debe estudiar con los/as docentes los posibles modos de su desarrollo en cada contexto institucional.

A modo de síntesis: construir la situación de construcción como problema de la profesión

En este artículo tematizamos cuestiones vinculadas a la situación de construcción de una secuencia de enseñanza en torno a un recorrido global. Interpretamos como una condición en esta situación el hecho de que, a partir de diversas regulaciones sobre la enseñanza y la propia construcción del saber docente, se promueven estrategias que evitan secuenciar la enseñanza de manera similar a las desarrolladas en tradiciones en la escolaridad infantil, estructuradas usualmente a partir de la progresión de contenidos. Una manifestación de esto es la jerarquización de la necesidad de la articulación interdisciplinaria o en torno a un núcleo temático.

Advertimos algunas tensiones en los modos de resolver el problema de cómo articular las actividades de forma tal de favorecer la construcción progresiva de conocimientos matemáticos, en el marco de las condiciones de la modalidad. Reconocemos que se podrían generar otros dispositivos que se sostengan en dicha lógica de secuenciación propuesta y, al mismo tiempo, reconozcan la progresión de los aprendizajes de saberes específicos. Ante este problema de enseñanza, la respuesta analizada es la que se logra construir en el marco de las condiciones en que se desarrolla la enseñanza en la modalidad.

Hemos relevado como una respuesta habitual a esta problemática la planificación de actividades individuales o la articulación de actividades con "temáticas emergentes", sin continuidad temática necesaria en recorridos que excedan a una o pocas clases. En tal sentido, relevamos ciertos indicios de una tendencia a la fragmentación de los trayectos de estudio de las matemáticas, y por ende, cierto debilitamiento de la potencialidad de sostener la progresión en la construcción de aprendizajes en torno a saberes específicos. Ambas docentes reconocen la existencia de ciertas restricciones para proyectar un recorrido, principalmente el problema de la asistencia discontinua, lo que favorece la apelación a otro tipo de actividades no secuenciadas, cuya gestión puede ser más sencilla, en tanto es más fácil acomodarlas en los escasos tiempos disponibles.

Concebir la *situación de construcción* y otras dificultades del oficio como verdaderos *problemas de la profesión* exige plantear estas cuestiones en un nivel que trascienda el ámbito doméstico de cada docente. Por el contrario, requiere construir un ámbito colectivo en el que docentes, investigadores/as y otros actores en la noósfera recontextualicen los resultados de la investigación didáctica, teniendo en cuenta las tensiones identificadas y los diferentes modos de apropiación de los recursos de enseñanza en los cotidianos escolares.

"Ambas docentes reconocen la existencia de ciertas restricciones para proyectar un recorrido, principalmente el problema de la asistencia discontinua, lo que favorece la apelación a otro tipo de actividades no secuenciadas, cuya gestión puede ser más sencilla, en tanto es más fácil acomodarlas en los escasos tiempos disponibles."

Referencias

Ardoino, J. (1993). Análisis multirreferencial. *Revista de la Educación Superior, ANUIES, México, 22(87), 1-5.*

Bednarz, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante: Regarder ensemble autrement*. París: Editions L'Harmattan.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'AMQ. Montréal, 23, 14-24.*

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática,* 12(01), 5-38.

CFE (Consejo Federal de Educación). (2010a). *Educación Permanente de Jóvenes y Adultos. Documento Base.* (Aprobado por Res. CFE N 118/10).

CFE (Consejo Federal de Educación). (2010b). *Lineamientos curriculares para la Educación Permanente de Jóvenes y Adultos.* (Aprobado por Res. CFE N 118/10).

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y. (2013a). *De la transposición didáctica a la teoría antropológica de lo didáctico* [Curso inédito dictado en la Universidad Nacional de Córdoba].

Chevallard, Y. (2013b). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques: Questions vives et problèmes cruciaux. En A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat y E. Roditi (eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques: Problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. XVIe école d'été de didactique des mathématiques. Carcassonne du 21 au 28 août 2011.* (pp. 85-120). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. y Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. En G. Gueudet y L. Trouche (eds.), Ressources vives. *Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes: PUR - INRP.

Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(1), 9-50.

Gerez Cuevas, N. (2020). *La enseñanza de la matemática en el nivel primario de la modalidad de Educación Permanente de Jóvenes y Adultos: Saberes docentes, prácticas y condiciones institucionales.* (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional de Córdoba.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble: La Pensée Sauvage.

MECyT (Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología) (2008). Un currículum para la Educación de Jóvenes y Adultos. Coordinación de Educación de Jóvenes y Adultos.

Mercado, R. (2002). *Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños.* México DF: Fondo de Cultura Económica.

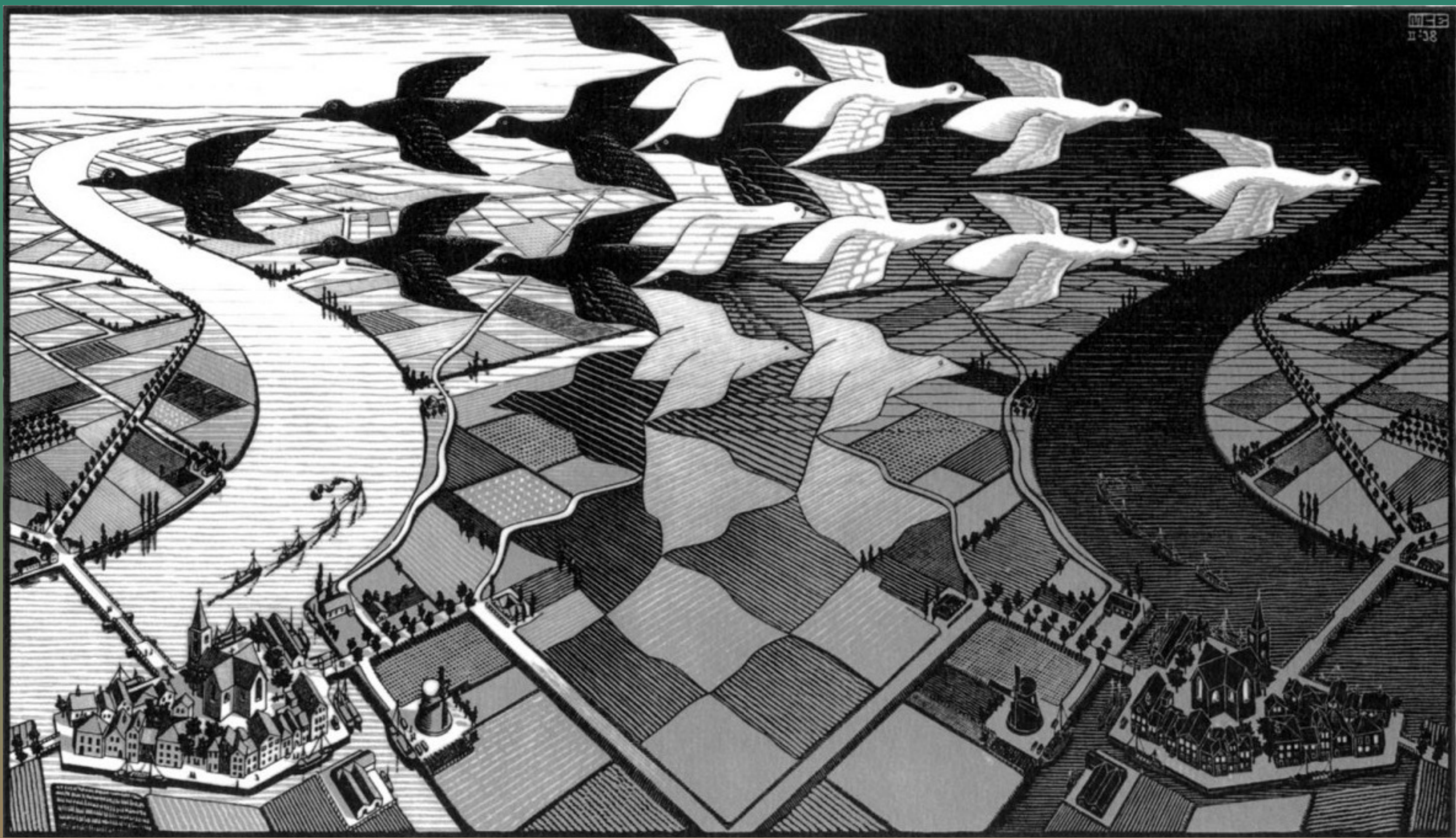
Rockwell, E. (2009). *La experiencia etnográfica. Historia y cultura en los procesos educativos.* Buenos Aires: Paidós.

Ruiz Olarria, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza.* (Tesis de Doctorado). Universidad Autónoma de Madrid.

Sadovsky, P. (2018, junio). Los sentidos de la escuela en disputa. Notas críticas sobre la concepción de conocimiento implicada en los documentos ministeriales sobre la escuela secundaria. *Educar en Córdoba, 35, 5.*
Disponible en: https://revistaeducar.com.ar/wp-content/uploads/2018/06/22a26.pdf

Representación y densidad en los reales

Análisis de experiencias de aula



"Bird Perfect" Ilustración de Maurits Cornelis Escher (1898) *disponible en Wikimedia Commons* https://commons.wikimedia.org/

Mara Cedrón · Betina Duarte

Romina Herrera · Cecilia Lamela

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Mara Cedrón

Es profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática, Universidad de Buenos Aires (UBA). Actualmente, integra el equipo dedicado a la enseñanza de la matemática para la escuela secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) en donde se desempeña como profesora adjunta e investigadora. En investigación, como parte del equipo que dirige Betina Duarte, su estudio se focaliza en la enseñanza y el aprendizaje de los números reales en la escuela secundaria. Participó antes en investigaciones sobre TIC y trabajó en varias instituciones de formación docente.

Betina Duarte

Es licenciada en Matemática, Universidad de Buenos Aires (UBA) y doctora en Educación, Universidad de San Andrés. Se desempeña como profesora asociada y directora del departamento de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), donde enseña en programas de formación de posgrado para profesores de matemática y en programas de grado dirigido a futuros docentes. Su investigación se centra en la enseñanza de la demostración, la fundamentación y la validación en distintas zonas de la enseñanza de la matemática del nivel secundario, en particular la enseñanza de los números reales.

Romina Herrera

Es Profesora de Física y Matemática, Universidad Nacional de La Plata (UNLP). En elaboración de tesis de la Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales (orientación Matemática), Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (UNLP). Profesora Adjunta en la Facultad de Ciencias Naturales y Museo (UNLP). Directora Centro de Información e Investigación Educativa de Berisso. Formadora del Equipo Técnico Regional Matemática. Dirección de Formación Docente Permanente. Dirección General de Cultura y Educación. Profesora tutora Programa Apoyo y contención a los alumnos del último año de la escuela secundaria. Secretaría de Asuntos Académicos (UNLP). Secretaría de Asuntos Académicos 2011 a 2013. Profesora escuela secundaria. Coordinadora y Autora "Antromática. Aportes para la formación de alumnos de Antropología y Profesorado de Biología". 2017

Cecilia Lamela

Es Profesora de Educación Media y Superior en Enseñanza de la Matemática y Magíster en Educación: pedagogías críticas y problemáticas socioeducativas, Universidad de Buenos Aires (UBA). Profesora Adjunta de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). Coordinadora y docente del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática y docente en la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Investigadora en proyectos acerca de la enseñanza de la Matemática (UNIPE). Docente en escuelas secundarias de la Ciudad de Buenos Aires. Coautora de libros de texto de Matemática para escuela secundaria y de Documentos Curriculares para la Enseñanza de la Matemática.

Representación y densidad en los reales

Análisis de experiencias de aula

Representation and density in real numbers: analysis of classroom episodes

Mara Cedrón *
Betina Duarte **
Romina Herrera ***
Cecilia Lamela ****

Fecha de recepción: 30 de Marzo 2021
Fecha de aceptación: 12 de Mayo 2021

RESUMEN

En este artículo presentamos el análisis de un problema didáctico: el papel que juega la doble representación de los números racionales en el estudio y la comprensión de la propiedad de la densidad en el conjunto de los números racionales (Q). Se trata de un recorte del proyecto de investigación PICTO-2017-0022 "De la resolución de problemas hacia la construcción de teoría en el aula. Puentes posibles en el campo de los Números Reales", en el que estudiamos condiciones didácticas que promuevan un pensamiento teórico para el estudio de los números reales en la escuela secundaria. En particular, queremos analizar el trabajo desplegado en algunas experiencias de aula en torno a la igualdad $0,\hat{9} = 1$.

palabras clave

números reales · densidad · representación expresiones decimales · educación secundaria

Contacto

*mara.cedron@unipe.edu.ar ; **betina.duarte@unipe.edu.ar ; ***roherrera@fcnym.unlp.edu.ar ; ****cecilia.lamela@unipe.edu.ar

ABSTRACT

In this article we present an analysis of an educational problem: the role of the double representation of rational numbers in the study and comprehension of the density property in Q. This research is part of the PICTO-2017-0022 research project "From the resolution of problems to the construction of theory in the classroom. Possible bridges in the field of the Real Numbers" in which we inquire about didactic conditions for a study of real numbers in secondary school to promote theoretical thinking. In particular, we want to analyse the work developed over some classroom episodes around the equality $0,\hat{9} = 1$.

keywords

real numbers · density · representation
decimal expressions · secondary education

El estudio de la densidad en vínculo con la conceptualización del conjunto de los números reales

Diversas investigaciones señalan la necesidad de desplegar la idea de densidad (entre otras cuestiones) como una componente necesaria y constitutiva de los racionales y más aún de los reales (Durand-Guerrier, 2016, 2018; Durand-Guerrier y Vergnac, 2013; Vergnac, 2013) durante su enseñanza en el nivel secundario.

Al mismo tiempo, la indagación de los conocimientos de estudiantes en el último año de la educación secundaria obligatoria ofrece evidencia acerca de una falta de comprensión del significado de la densidad por parte de los y las estudiantes, tanto en el conjunto de los números racionales (Q) como en el de los reales (IR) (Voskoglou y Kosyvas, 2012; Vergnac, 2013).

En particular, Durand-Guerrier (2016), retomando los trabajos de Vergnac (2013), señala que la ausencia de un estudio de la densidad de los números racionales (en el propio conjunto Q) podría ser un obstáculo en la conceptualización de los números reales. En su estudio, Vergnac (2013) observa que en la escuela secundaria lo continuo se reconoce en la recta real como lo que "no tiene ni agujeros ni saltos". Esta caracterización de lo continuo permite separarlo de lo discreto, por ejemplo, de los números naturales (IN). Vergnac concluye que para los y las estudiantes, entre lo discreto y lo continuo "no hay nada", idea que Durand-Guerrier llama *díada discreto/continuo*. Efectivamente, ante una construcción intuitiva y geométrica de la noción de continuidad apoyada en la recta numérica, las autoras reconocen que no es posible diferenciar visualmente la recta racional (densa y no continua) de la recta real (continua), lo que refuerza la díada discreto/continuo. Para Durand-Guerrier (2018), el estudio de la densidad en Q permitiría por un lado cuestionar la díada discreto/

continuo, y por el otro, considerar la tríada discreto/denso/continuo como punto de apoyo para la conceptualización del conjunto de los números reales, pues la noción de completitud en IR sólo puede tener sentido para los estudiantes si se construye la noción de densidad, en particular la densidad de Q.

"...abordamos el estudio de la densidad en diversos conjuntos (racionales, irracionales y reales) como modo de introducir a los y las estudiantes a problemas y preguntas que puedan retomarse en un estudio posterior de la completitud/continuidad de IR"

Hemos desarrollado una propuesta de enseñanza donde abordamos el estudio de la densidad en diversos conjuntos (racionales, irracionales y reales) como modo de introducir a los y las estudiantes a problemas y preguntas que puedan retomarse en un estudio posterior de la completitud/continuidad de IR, cuya realización podría exceder el ámbito de la enseñanza secundaria, eventualmente. Con este propósito, el estudio de los números irracionales en IR permitiría comprender la existencia de números que no son racionales, que tienen un lugar en la recta y también que son "muchos" y densos.

El estudio de la densidad, particularmente en Q, permite abordar un aspecto relativo a este conjunto numérico que difiere a sólo operar con ellos. La posibilidad de encontrar y de ubicar infinitos números entre dos números reales dados es una acción que se encuentra en oposición (Vergnac, 2013) con dos ideas presentes en los y las estudiantes: por un lado, un conjunto que contiene infinitos números (o puntos en la recta) necesita extenderse y por lo tanto no puede ser un conjunto acotado; y por otro lado, no es posible concebir un conjunto acotado infinitamente divisible. En ambos casos, el infinito se asume como una expansión acompañando la idea que subyace en la construcción de los naturales y los enteros. Es así que la comprensión de la densidad supone una percepción del infinito (en tanto proceso o producto) que no resulta evidente o natural para este nivel de enseñanza.

"...el estudio de los números irracionales en IR permitiría comprender la existencia de números que no son racionales, que tienen un lugar en la recta y también que son "muchos" y densos..."

Por otra parte, las formas de tratamiento que proponen los y las estudiantes frente a las ideas sobre densidad son sensibles a las diferentes y posibles representaciones de los números reales. En la secuencia asumimos este hecho y, de modo previo a la introducción de los números irracionales, decidimos profundizar en la densidad de Q usando la representación decimal de estos números. Esta decisión se funda en la hipótesis de un doble enriquecimiento entre la conceptualización de la densidad y la conceptualización de los números que tienen una representación mediante expresiones decimales infinitas. El trabajo con –y el dominio de– las expresiones decimales colabora en el tratamiento de la propiedad de densidad. Es decir, producir expresiones decimales finitas e infinitas comprendidas entre dos números dados con apoyo en cómo se ordenan es un soporte para abordar la pregunta general acerca de si hay o no infinitas posibilidades. De manera inversa, abordar preguntas sobre la densidad genera un espacio para profundizar el estudio de las expresiones decimales infinitas (periódicas o no) y las dudas o los conflictos que trae. Retomaremos en nuestro análisis algunas discusiones particulares que irrumpieron en las clases estudiadas sobre expresiones decimales infinitas al tratar la propiedad de densidad.

Nuestra experiencia como docentes del nivel nos permite afirmar que, para una parte de la clase, la equivalencia entre las ideas "dados dos números reales distintos, hay infinitos números entre ellos" y "no existe ni el anterior ni el posterior inmediatos a un número real" no resulta obvia. Es decir, la posibilidad de encontrar infinitos números entre dos dados no constituye, para una mayoría, evidencia suficiente para considerar la imposibilidad de encontrar el anterior o posterior inmediato de un número real. Efectivamente, el análisis de algunas implementaciones de la secuencia diseñada nos señala que estudiantes que comprenden y dominan distintas técnicas para ubicar infinitos números reales (de distintos tipos) entre dos dados, sostienen, sin percibir la inconsistencia, que algunos números racionales tienen siguiente inmediato, e incluso también postulan que un conjunto acotado y abierto en IR tiene último elemento. La propuesta diseñada tiene la intención de problematizar y comprender ambas ideas.

El abordaje de la densidad en la secuencia diseñada y la emergencia de la igualdad $0,\hat{9} = 1$

En la secuencia diseñada, se realiza una primera incursión en el estudio de la densidad de Q, luego ampliada al conjunto de los números irracionales. En estas primeras actividades, que permiten desplegar la idea "entre dos racionales dados existen infinitos racionales", proponemos preguntas que involucran la elaboración de argumentos por parte de los y las estudiantes. Esta búsqueda de argumentos precisa, y a la vez propicia, una posición teórica por parte de ellos.

En el estudio particular de la densidad en Q, con la intención explícita de cuestionar además la idea de anterior y posterior inmediato de un número racional, hemos optado por abordar esta pregunta a partir de considerar la posibilidad de encontrar primer y último elemento en un intervalo abierto. Más en particular, propusimos estudiar el conjunto de todos los racionales comprendidos entre los números 1 y 2, y buscar un primer y último elemento para este conjunto bajo la restricción de que el número tenga hasta dos decimales, luego tres, y finalmente cualquier cantidad de decimales (estas características organizan la actividad en distintas etapas). De este modo, se hace visible que ciertos conjuntos de decimales, con un cardinal cada vez más grande, son también conjuntos discretos.

Entendemos que la pregunta por el primer elemento del conjunto de los números racionales entre 1 y 2 resultaría más fácil de abordar por parte de los y las estudiantes que la pregunta por el último elemento. Efectivamente, cuando la clase de Matemática se dedica a la exploración y búsqueda de estos números, advierte que frente a cualquier candidato a primer elemento es posible encontrar otro

> *“Entendemos que la pregunta por el primer elemento del conjunto de los números racionales entre 1 y 2 resultaría más fácil de abordar por parte de los y las estudiantes que la pregunta por el último elemento.”*

número del conjunto que resulta menor apelando a la inclusión de ceros en la expresión decimal. Así, se podría proponer 1,01 o bien 1,001, etc., generando un proceso infinito que daría cierta estabilidad (o certeza) de que no es posible encontrar el primer elemento.

Por otra parte, considerar el último elemento del conjunto de los números entre 1 y 2, o su equivalente, encontrar el número inmediatamente anterior a 2, deriva en una sucesión de números decimales de expresión finita que parecen desembocar en un número aparentemente distinto a 2, el $1,\hat{9}$. La noción de la densidad bajo la forma "entre dos números racionales distintos es posible encontrar otro número racional" se constituye en un punto de apoyo para cuestionar la distinción que los y las estudiantes proponen entre estas dos escrituras; es decir, permite plantear la pregunta acerca de qué número se podría encontrar entre $1,\hat{9}$ y 2. La búsqueda de este número deriva en el tratamiento de otra expresión, $0,\hat{9}$, más conocida por los y las estudiantes a esta altura de su escolaridad, y esto conduce al análisis de la igualdad $0,\hat{9} = 1$. Reconocemos así un vínculo entre el estudio de la densidad y la dualidad en la representación de algunos números racionales.

Presentación y análisis de experiencias de aula

En la sección anterior hemos desplegado nuestro análisis acerca de la potencia y también de la complejidad vinculada a la conceptualización de la densidad en el conjunto de los números reales en la escuela secundaria. En particular, identificamos un problema de enseñanza que se presenta cuando emerge la doble representación de los números racionales (como es el caso de $0,\hat{9}$ y 1) en vínculo con el estudio de la propiedad de densidad. Este problema se presenta de forma ineludible al confrontar la posibilidad de existencia de último elemento en un intervalo abierto como el (1;2). En esta sección analizaremos sucesos de las clases frente a este problema.

> *“...identificamos un problema de enseñanza que se presenta cuando emerge la doble representación de los números racionales (como es el caso de $0,\hat{9}$ y 1) en vínculo con el estudio de la propiedad de densidad.”*

Hemos realizado distintas experiencias de campo en diversos cursos, algunas veces implementando la propuesta de enseñanza en proceso para indagar su funcionamiento, y otras que constituyeron el campo propiamente. Dentro de estas experiencias, que generalmente se ubicaron de tercero a quinto año de la escuela secundaria en Ciudad Autónoma de Buenos Aires y provincia de Buenos Aires, algunas y algunos estudiantes manifestaron que ya habían considerado la igualdad

$0,\hat{9} = 1$ en otro momento de la escolaridad. A pesar de que la gran mayoría de los y las estudiantes habían problematizado ya esta igualdad, las reacciones que se vivieron en cada aula no fueron homogéneas: mientras algunos/as creían y confiaban en la veracidad de la igualdad, otros se manifestaban en duda o en franca oposición. Nos proponemos entender qué razones subyacen a estas dos posiciones tan concretas y opuestas, tomando para ello las argumentaciones que esgrimen los y las estudiantes durante el tratamiento de esta igualdad en cuatro aulas diferentes.

Las explicaciones que los y las estudiantes proponen para sostener la igualdad

Nos interesa detenernos en las explicaciones que los y las estudiantes propusieron en situación de analizar la validez de esta igualdad. Involucrarnos con sus explicaciones nos permitirá visibilizar los conocimientos que ponen en juego, las creencias que subyacen, sus modos de razonar, las diferencias entre diversas explicaciones, entre otras. En particular, nos proponemos identificar si en las explicaciones que expresan estos/as estudiantes hay ideas que se muestran con más convicción mientras que frente a otras presentan más dudas.

Como lo anticipamos, en todas las implementaciones, las explicaciones de la igualdad $0,\hat{9} = 1$ surgieron frente a la pregunta: ¿cuál es el mayor de todos los números racionales entre 1 y 2? Y la correspondiente propuesta (de casi toda la clase) de $1,\hat{9}$ como el mayor racional entre 1 y 2.

En un quinto año, ante la propuesta de $1,\hat{9}$, la profesora realiza intervenciones para recuperar en la clase un conocimiento que creía que sus estudiantes tenían de años anteriores: $0,\hat{9}$ es 1. Esta afirmación genera algunas expresiones de resistencia en la clase. La profesora también les recuerda que habían demostrado esa igualdad y un estudiante, F., se ofrece a explicarla. La explicación de F. parte de considerar la igualdad $1/3 = 0,\hat{3}$. Luego, propone multiplicar por 3 en ambos lados de esa igualdad, obteniendo y escribiendo $3/3 = 0,\hat{9}$. Entonces, concluye F., $0,\hat{9}$ es igual a 1 y lo agrega a la igualdad anterior, escribiendo $3/3 = 0,\hat{9} = 1$.

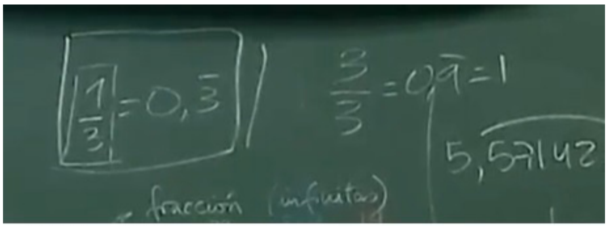


Figura 1. *Pizarrón con la explicación de F.*

A partir de esta intervención, la alumna M. ofrece otra explicación que parece elaborar a partir de las relaciones que planteó su compañero. M. también parte de considerar que $1/3 = 0,\hat{3}$ explicitando que es así porque "1 dividido 3 da $0,\hat{3}$". Recurriendo a la relación entre la división y el producto, propone: "1 dividido 3 es $0,\hat{3}$ entonces $0,\hat{3} \times 3$ tiene que ser igual a 1". Luego, se detiene a explicitar por qué la cuenta $0,\hat{3} \times 3$ da $0,\hat{9}$. De este modo, concluye M., "$0,\hat{9}$ es igual a 1".

La explicación que F. elige para convencer a sus compañeros/as de la igualdad $0,\hat{9} = 1$ parte de un hecho que está respaldado por una operatoria: puede considerar como verdadero el hecho de que $1/3 = 0,\hat{3}$ validado por la división hecha a mano, sobre la cual la clase tiene una posición de confianza. Una vez aceptada esta igualdad, F. le da un tratamiento que, en principio, prescinde de las escrituras involucradas transformando la igualdad en otra (igualdad) a través de una multiplicación realizada en ambos miembros. Esta transformación está comandada por la intención de obtener una escritura para el número 1, aunque este propósito no está explicitado ni en el texto ni en el discurso de F. Este razonamiento y una operatoria que permanece de un modo implícito en la escritura (en la clase no se cuestiona ni se explicita la técnica a utilizar para un producto de $3 \times 0,\hat{3}$ en el que hay una escritura decimal que no termina) permite a F. escribir $3/3 = 0,\hat{9}$.

De este modo, F. propone a la clase considerar esta igualdad como una consecuencia de un razonamiento correcto, válido. Lo que supone asignar un estatuto de validez para una afirmación a la que se arriba como resultado de un razonamiento deductivo frente al cuestionamiento de dicha afirmación (en nuestro caso, la igualdad) a partir de someterla a un análisis de sentido. Expresiones de estudiantes en esta clase nos permiten desplegar aún más estas ideas. Durante la explicación, F. es interpelado por un compañero quien señala algo que para él comporta una contradicción en esa igualdad: la fracción 3/3 puede leerse en términos de una división, pero la división 3:3 no arroja como resultado la expresión decimal $0,\hat{9}$ (a este tipo de interpretación la señalamos como un análisis de sentido). Notamos entonces que la igualdad $3/3 = 0,\hat{9}$ porta una inconsistencia en función de los conocimientos disponibles para los y las estudiantes, y esta incongruencia se confronta con el razonamiento deductivo propuesto por F. ¿Cómo se salda esta cuestión?

Las respuestas de F. frente a esta objeción también nos permiten interpretar la comprensión y aceptación que F. asume frente a la igualdad como producto del razonamiento realizado. Por ejemplo, F. dice: "la expresión decimal de 1/3 es $0,\hat{3}$ y, si seguís con esta lógica (señalando las igualdades involucradas en su explicación), la expresión decimal de 3/3 es $0,\hat{9}$". Las posiciones recuperadas de ambos estudiantes nos permiten identificar que esa igualdad se entiende ante una lectura producto de un razonamiento deductivo (la propuesta por F.) y se cuestiona al leer ambos miembros (cuestionamiento realizado por su compañero). Al mismo tiempo, nos permiten entender tensiones e ideas que pueden movilizarse al enfrentar ambas lecturas en simultáneo.

Por su lado, M. inicia su explicación identificando la fracción con la operación de división. Para avanzar, se apoya en una lectura de la igualdad 1/3 = $0,\hat{3}$ que recupera un sentido de la división y su vínculo con la multiplicación: "a dividido b es c si y sólo si b por c es a". Esta relación le permite decir y establecer que entonces 1 = $0,\hat{3}$ x 3. La operación 3 x $0,\hat{3}$ da por resultado (o se resuelve como) $0,\hat{9}$ y le permite deducir entonces que $0,\hat{9}$ = 1.

Esta mirada detallada sobre las explicaciones que expresan F. y M. nos permite dar cuenta de que si bien ambas se apoyan en la misma igualdad inicial, los conocimientos que movilizan para producir nuevas afirmaciones son diferentes.

En otra implementación, frente a la misma actividad, la clase propone casi unánimemente al $1,\hat{9}$ como el mayor racional entre 1 y 2. En estas circunstancias, una alumna, T., se ofrece a explicarlo en el espacio colectivo de la clase. Esta alumna ya había explicado a sus compañeros/as en el contexto de trabajo en pequeños grupos que $1,\hat{9}$ no podía ser el mayor racional entre 1 y 2 porque es igual a 2.

Dado que la explicación que comienza T. se centra en la igualdad $0,\hat{9} = 1$ y que la docente entiende que la relación entre una y otra igualdad puede no ser evidente para la clase en general, se explicita al resto de la clase que se dejará para un segundo momento entender el vínculo entre un hecho y otro.

T. propone y dibuja un chocolate que está dividido en 3 partes (que de manera implícita las considera iguales), señalando que una parte de ese chocolate es un tercio de chocolate, y agregando que 1/3 es $0,\hat{3}$. Luego, explica que cualquiera de esos tercios es también $0,\hat{3}$ y lo escribe debajo de cada tercio. Entonces, considera en paralelo dos argumentos apoyada en el esquema: por un lado, los tres tercios hacen 3/3 del chocolate y esto es el total del chocolate; por otro lado, propone sumar tres veces el número $0,\hat{3}$ obteniendo como resultado $0,\hat{9}$. Reúne ambos argumentos y concluye que $0,\hat{9} = 1$. Esta doble mirada puede verse en la foto de su explicación en el pizarrón.

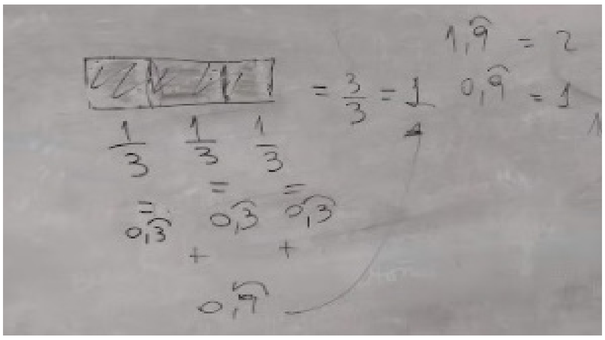


Figura 2. *Foto del pizarrón con la explicación de T.*

T. usa con seguridad la igualdad $1/3 = 0,\hat{3}$ como dos formas equivalentes de expresar un mismo número (tanto que ella identifica una parte de chocolate con una escritura decimal infinita, asunto poco frecuente en la matemática escolar). Además, recurre a un sentido de ese número en tanto fracción, a una concepción de la fracción como parte de la unidad, y, también, a una representación icónica familiar (el chocolate) que es soporte para pensar esa relación. El uso del contexto de reparto junto con la representación de partes de la unidad en el modo de escritura decimal es, en parte, una novedad para la clase de Matemática y es lo que T. ofrece y reconoce como productivo para entender esta igualdad.

Nos interesa distinguir algunas cuestiones que relevamos compartidas en estas explicaciones:

- La confianza que los y las estudiantes otorgan a la igualdad $1/3 = 0,\hat{3}$ junto con la posibilidad de pasar de una representación a otra en algunos casos, o de considerarlo simplemente como una igualdad verdadera sobre la cual se puede apoyar un razonamiento.
- Los significados diversos que otorgan a la igualdad $1/3 = 0,\hat{3}$ y también la posibilidad de deducir nuevas relaciones a partir de esos significados.
- La posibilidad de asumir la igualdad $0,\hat{9} = 1$ como una consecuencia de deducciones y afirmaciones que los y las estudiantes aceptan y confían.

Producción de argumentos para confrontar la igualdad

La emergencia de la igualdad $0,\hat{9} = 1$ provocó en algunos y algunas estudiantes desconfianza, duda e incredulidad. Se reconoce en frases tales como: "no puede ser porque no es 1, no llegás a 1"; "algo le falta al $0,\hat{9}$ para llegar a 1, si no, no existe ese número, es 1"; "$0,\hat{9}$ es 9/9, y eso es 1, pero $0,\hat{9}$ no llega a ser 1, es 0,9999... infinitos 9 no llega a ser 1, siempre falta un poquito para el 1"; "es como que anulás el periódico, al pasarlo a fracción deja de ser infinito... no tiene mucha lógica"; "no me cierra".

Reconocemos cierta resistencia a aceptar la validez de esta igualdad apoyada en el supuesto de que $0,\hat{9}$ es un número menor a 1 y por lo tanto "no llega a 1" aun cuando se haya ofrecido alguna explicación como las mencionadas en el apartado anterior. Esta idea de que $0,\hat{9}$ es menor a 1 parece estar apoyada en dos cuestiones que involucran la representación de los números y su conceptualización: por un lado, la escritura "cero coma" es admitida en la escuela para identificar números menores estrictamente a uno; por el otro, la visualización de infinitos 9 en la escritura 0,9999... remite a la imposibilidad de alcanzar el 1 "porque falta un poquito". Esta posición de rechazo generó algunos argumentos en diversas clases para no aceptar la igualdad que compartiremos a continuación.

Ante una explicación (ver Figura 1) que concluye que $1 = 0,\hat{9}$ apoyada en $1/3 = 0,\hat{3}$ y la multiplicación por 3 en ambos miembros de la igualdad, algunos/as estudiantes ponen en cuestión la igualdad inicial $1/3 = 0,\hat{3}$. Por ejemplo, un estudiante plantea que el uso de la fracción lleva a resultados exactos, mientras que la escritura decimal conduce a resultados aproximados: "no entiendo... al pasar una fracción a decimal es como que no es exacto... si hacés $0,\hat{3} \times 3$ te da $0,\hat{9}$ que no es 1, ¿no le falta cero coma cero cero cero... infinitos ceros [y el] uno?". Para avanzar con su argumentación, sostiene: "porque es infinito... si hacés $1/3$ tres veces, te queda un entero cerrado, y si hacés $0,\hat{3}$ tres veces, te da cero coma nueve nueve nueve nueve infinito". Se apoya en estas ideas para argumentar a favor de que $1/3$ no es lo mismo que $0,\hat{3}$. Notamos aquí que para llegar a esta conclusión está apoyándose (de un modo implícito y carente de estructura deductiva, y por lo tanto, complejo para analizar) en el hecho de que $0,\hat{9}$ es distinto de 1. Es decir, si bien el estudiante cuestiona la igualdad $1/3 \ = 0,\hat{3}$, el argumento que utiliza es, básicamente, negar la igualdad $1 = 0,\hat{9}$. Destacamos en su argumento la interpretación de la escritura infinita (tanto para 0,3333... como para 0,9999) en términos de un proceso, de un hecho que está ocurriendo y no finaliza. La expresión 0,9999… resultaría un proceso en el que se van agregando nueves y cuyo agregado sucesivo no se completa nunca. Estando este proceso en marcha, la igualación a 1 parece poco posible.

En otra implementación frente a la misma explicación también se cuestiona la igualdad que es punto de partida $1/3 \ = 0,\hat{3}$ como forma de argumentar que $0,\hat{9}$ no es 1. Lo paradójico de este caso es que antes de comenzar con la explicación que se apoya en $1/3 \ = 0,\hat{3}$, esta igualdad había sido abordada y confirmada a partir de realizar 1 dividido 3 "a mano" (Figura 3) y obtener $0,\hat{3}$. Es decir, en ese momento inicial (y separado de $0,\hat{9}$ = 1), esa igualdad era considerada verdadera; luego de la explicación para arribar a $0,\hat{9}$ = 1, la igualdad $1/3 \ = 0,\hat{3}$ es cuestionada: ¿qué es lo que hace cambiar de un momento a otro el valor de verdad de dicha igualdad?

En las experiencias que relatamos, estos estudiantes consideran imposible que $0,\hat{9}$ sea

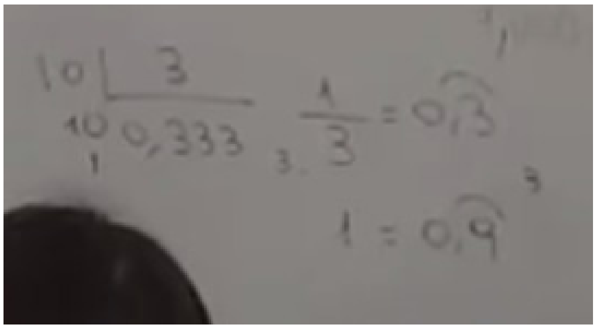


Figura 3: *La cuenta "1 dividido 3"*

1 a pesar de la explicación ofrecida. Interpretamos que esta igualdad los confronta con sus certezas. Ahora bien, antes que cuestionar los pasos realizados en dicha explicación (esto es, partiendo de una igualdad, si se multiplica a ambos miembros por el mismo número, distinto de 0, se obtiene otra igualdad), se inclinan por desestimar que $1/3 \ = 0,\hat{3}$, el punto de partida de la explicación.

"En las experiencias que relatamos, estos estudiantes consideran imposible que 0,$\hat{9}$ sea 1 a pesar de la explicación ofrecida. Interpretamos que esta igualdad los confronta con sus certezas."

La misma explicación de la igualdad recibe otras objeciones. En una clase, una alumna rechaza la igualdad $0,\hat{9} = 1$ argumentando para ello las características aceptadas para el conjunto de los números naturales. En particular, argumenta que $0,\hat{9}$ no es 1 apoyándose en que 1 es un número natural mientras que $0,\hat{9}$ no puede serlo, ya que se escribe "con coma, y los números naturales no se escriben con coma". La contradicción que plantea pone en escena los saberes construidos por los y las estudiantes a lo largo de la escolaridad acerca de las escrituras de los números: un número que se escribe "con coma" no es natural. De este modo, la escritura del número, para esta estudiante, estaría informando, o bien mostrando, la clase de número que es. Ahora bien, la explicación que se ofrece permite concluir que si bien $0,\hat{9}$ se escribe con coma, es un número natural porque es igual a 1. De manera que el conjunto de pertenencia de este número se plasma en la igualdad producto de la explicación y no en su escritura; es decir, $0,\hat{9}$ es un número natural. Hay así una tensión: lo que informa una igualdad producto de un encadenado de pasos válidos y lo que informa una cierta representación del número. Nos interesa destacar que la emergencia de esta contradicción es de algún modo un ejercicio de control del grado de verdad de "la igualdad".

En pos de encontrar argumentos para refutar la igualdad entre $0,\hat{9}$ y 1, algunos/as estudiantes plantean un gesto particular: enunciar consecuencias (absurdas a su entender) de aceptar esa igualdad. Esto se puede apreciar en un estudiante en particular que enuncia para toda la clase: "si fuera verdad la igualdad $0,\hat{9}=1$, entonces la cuenta $1.000.000\times 0,\hat{9}$ debería dar 1.000.000 y es obvio que no da". Para este estudiante resulta imposible aceptar, siempre a partir de esta igualdad, que $1.000.000=999.999,\hat{9}$. Si bien, tal como hemos señalado antes, existe una misma razón para ambas igualdades, creemos que la diferencia entre ambas escrituras, por su tamaño y por la presencia de una gran cantidad de cifras diferentes en su parte entera, da más evidencia sobre lo absurdo de la igualdad en cuestión. Por otro lado, en algún sentido, la escritura $999.999,\hat{9}$ (que no enuncia el estudiante pero que pareciera que hace referencia de manera implícita) también involucra una mirada sobre las escrituras infinitas de estos números en tanto un proceso inacabado de agregar nueves detrás de la coma, razón por la cual no podría llegar a 1.000.000. En la misma sintonía, otro estudiante enuncia en un tono de incredulidad "sabemos que 1 + 1 = 2, entonces, siguiendo este razonamiento, ¿vamos a decir que $0,\hat{9}+0,\hat{9}$ es 2?".

En estas intervenciones, interpretamos que los y las estudiantes están buscando poner en juego el razonamiento por el absurdo tratando de llegar a alguna contradicción en base a certezas compartidas. En este sentido, cuanto más absurda resulta la conclusión a la que pueden arribar, más convencidos están de la imposibilidad de tomar como válida la igualdad cuestionada.

"Respecto al análisis de las resistencias que hemos encontrado, nos interesa señalar que mientras algunos/as estudiantes se ocupan de las explicaciones que conducen a la igualdad, otros eligen partir de la igualdad para alcanzar nuevas afirmaciones."

Respecto al análisis de las resistencias que hemos encontrado, nos interesa señalar que mientras algunos/as estudiantes se ocupan de las explicaciones que conducen a la igualdad, otros eligen partir de la igualdad para alcanzar nuevas afirmaciones. Entre los primeros notamos que no buscan encontrar un error en la explicación sino que cuestionan la validez del punto de partida, y consideramos que esto ocurre pues es allí donde la escritura infinita (0,333...) permite la emergencia de distintas lecturas o concepciones del infinito. Por otra parte, quienes se apoyan en la igualdad buscan

 ISSN 2422-5975, en línea

seguir razonando bajo la hipótesis de que 1 = $0,\hat{9}$ esperando producir un absurdo que les permita rechazar finalmente esta igualdad.

Agregamos que el rechazo de la igualdad se deriva de un ejercicio de control que pone en juego un conjunto importante de estudiantes en el que las escrituras y representaciones de los números tienen un papel fundamental. Así, las características de los números naturales hacen inviable aceptar como tal a un número representado con coma del mismo modo que se rechaza la igualdad de dos números cuya "parte entera" difiere.

Aportes teóricos que enriquecen nuestro análisis. Perspectivas de estudio

En los apartados anteriores recuperamos, de las experiencias realizadas, los argumentos que proponen los y las estudiantes para validar la igualdad $0,\hat{9}$ = 1, en qué se apoyan, cómo los construyen. A su vez, intentamos entender la resistencia de algunos/as estudiantes para aceptar esta igualdad. En estas resistencias encontramos diferencias. Algunos estudiantes rechazan la igualdad apoyándose en la confrontación que se les produce, por ejemplo, teniendo que incorporar al $0,\hat{9}$ como un número natural. Tal como señalamos antes, se produce una tensión entre lo que informa un encadenado de pasos válidos y la escritura del número.

Otros y otras estudiantes entienden que, habiendo puntos suspensivos, el proceso de agregar 9 es algo que está ocurriendo, es inacabado, y esta es la razón por la cual no se llegaría a uno. Sierpinska (1987) señala que este tipo de rechazo de la igualdad 1 = $0,\hat{9}$ puede obedecer a una visión del infinito potencial que se impone por encima del infinito actual. La igualdad supone aceptar un estado final en el proceso de agregar sucesivos 9, haciendo primar para ello una idea del infinito actual.

También, dentro de las resistencias encontramos algunos estudiantes que cuestionan la validez del punto de partida de la explicación ofrecida (1/3 no es $0,\hat{3}$), o bien, dan por válido 1 = $0,\hat{9}$ (a la que no dan crédito) para producir un absurdo que les permita rechazarla en consecuencia. Interpretamos que la confianza en las características que distinguen a $0,\hat{9}$ de 1 contrarresta la credibilidad que porta un razonamiento válido desde un punto de vista lógico y también matemático. Panizza (2005) señala que los procesos de validación y control que un/a estudiante puede producir están afectados por su comprensión sobre los distintos modos de razonamiento, sus nociones de verdad, así como también el grado de credibilidad que otorgan a los enunciados. Consideramos esta explicación oportuna para comprender las escenas que hemos compartido. Al mismo tiempo, acordamos con Panizza que, frente a estas condiciones, resulta necesario "pensar en la enseñanza del razonamiento no como un objeto (en sí mismo) sino en estrecha relación con los contenidos" (p. 10).

Interesadas en poder comprender aquellos casos en los que prevalece la resistencia frente a los razonamientos deductivos presentados y compartidos, nos apoyamos en la idea de valor epistémico que Duval (2016) presenta al estudiar el significado que los y las estudiantes atribuyen a una proposición. En términos de Duval, el significado de cualquier proposición es más complejo que el significado de cualquier palabra, pues se encuentra determinado por varias dimensiones: una dimensión semántica (a través de su contenido), una dimensión de conocimiento (a través de su valor epistémico) y una dimensión lógica (a través de su valor de verdad). La noción de valor epistémico (que distingue que una afirmación podría ser obvia, absurda, probable, posible, necesaria, entre otras) incorpora la subjetividad del sujeto que elabora o analiza un razonamiento, pues está en relación con la compresión de la afirmación en juego junto con sus conocimientos para comprenderla.

Compartimos con Duval que distinguir entre valor epistémico y valor de verdad permite explicar qué es lo que se logra al razonar. Efectivamente, el acto de razonar permite cambiar el valor epistémico de una proposición que se quiere probar o sobre la que se quiere convencer a otros. Las y los productores de los razonamientos conducentes a la igualdad (como F. y T.) muestran que el valor epistémico que le otorgan a la afirmación es del orden de lo necesario y lo sostienen de ese modo en su explicación y frente a la comunidad clase. Quienes no aceptan la igualdad se encargan de ofrecer conocimientos construidos con anterioridad como un modo de hacer prevalecer estos y así rechazarla. Frente a esto, señalamos que los y las estudiantes portan una red de conocimientos, un conjunto de certezas y de ideas (que no son homogéneas), y la igualdad pone en jaque a algunas de ellas, como ya lo hemos advertido. Al mismo tiempo, el razonamiento formulado que se utiliza para dar cuenta de la igualdad, si bien es válido, no resulta suficiente (desde la perspectiva de estos y estas estudiantes) en la medida que no les alcanza para comprender el porqué. Consideramos que frente a la explicación, no se modifica el valor epistémico que algunos/as estudiantes le otorgan a la igualdad.

Por otro lado, esta resistencia frente a la afirmación, aun ante diversas explicaciones dadas, podría estar en vínculo con ciertas ideas acerca de la escritura infinita (en este caso, el $0,\widehat{9}$) que, tal como mencionamos antes, involucra una percepción del infinito (potencial vs actual) que tal vez es difícil de atrapar en este momento de la escolaridad.

En este sentido, nos interesará avanzar en el estudio de las ideas de los y las estudiantes sobre las expresiones decimales infinitas (y más en general, en las ideas sobre el infinito) y las posibles transformaciones de esas ideas en el desarrollo de un trayecto de enseñanza y aprendizaje de los números reales.

"...nos interesará avanzar en el estudio de las ideas de los y las estudiantes sobre las expresiones decimales infinitas (y más en general, en las ideas sobre el infinito) y las posibles transformaciones de esas ideas en el desarrollo de un trayecto de enseñanza y aprendizaje de los números reales."

Por último, el espacio de discusión que se abrió en las diferentes aulas en donde la propuesta de enseñanza fue desarrollada genera condiciones para la aparición de las diversas ideas que intentamos identificar. Los y las docentes de estas experiencias ponen en discusión para toda la clase argumentos acerca del infinito, de las escrituras de los números, dudas acerca de la validez o no de la afirmación o sobre la explicación de la misma. Estos gestos docentes son necesarios para sostener una clase que permita indagar y avanzar en comprender los modos de razonar de los y las estudiantes.

 ISSN 2422-5975, en línea

Referencias

Durand-Guerrier, V. (2018). La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres. *Actes de la CORFEM, Nîmes* 13-14 juin 2016.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education (2),* 338-361.

Durand-Guerrier, V. y Vergnac, M. (2013). Les réels à la transition secondaire-supérieur, du discret au continu – quelle élaboration? Dans La réforme des programmes du lycée et alors? *Actes du colloque IREM,* 135-147.

Duval, R. (2016). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En R. Duval y A. Saénz-Ludlow (eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95-126). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

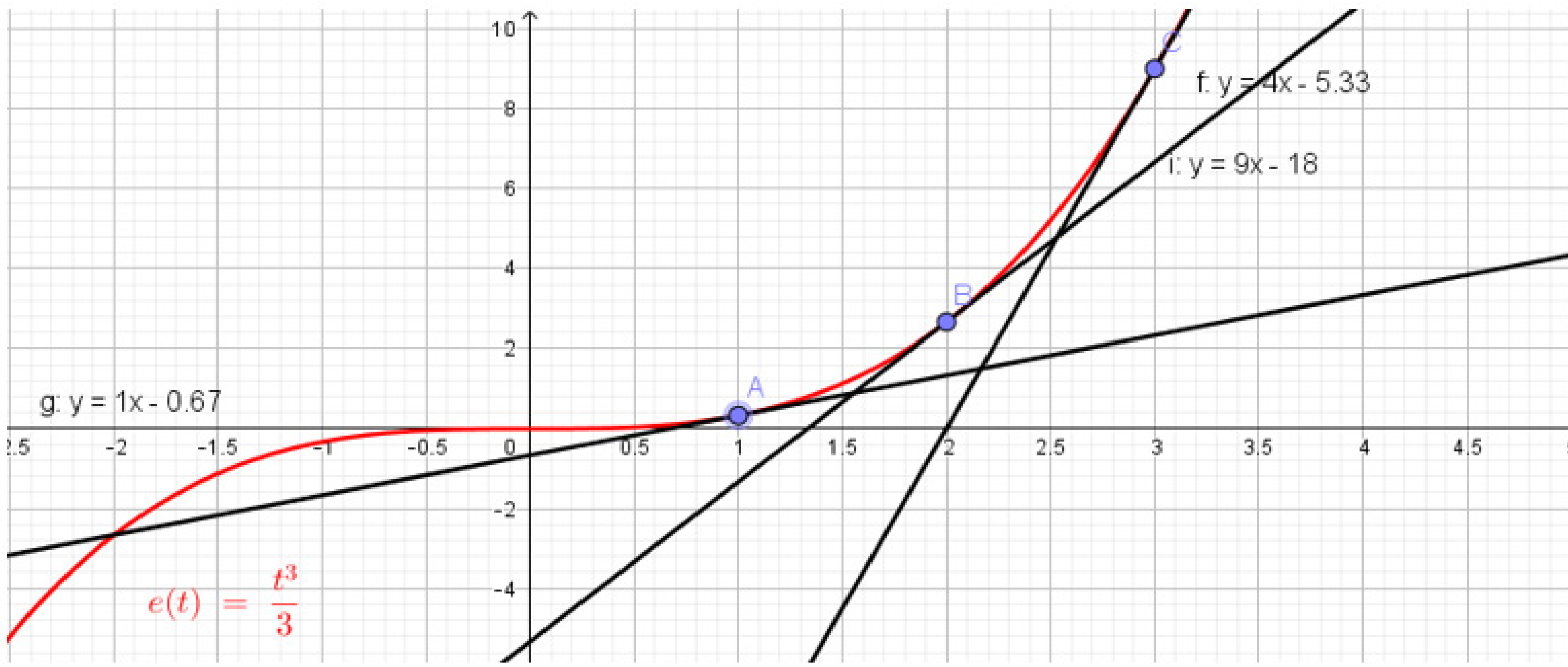
Panizza, M. (2005). *Razonar y Conocer.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics* (18), 371-397. Recuperado de: https://doi.org/10.1007/BF00240986

Vergnac, M. (2013). *Les nombres réels au lycée et à l'entrée à l'université. Premier état des lieux et perspectives.* Tesis Master 2 recherche, Université Montpellier II Mention "Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences". Université Montpellier II.

Voskoglou, M. y Kosyvas, G. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education,* 1(3), 301-336.

La evolución de la comprensión de los significados del concepto “derivada” en estudiantes de un Profesorado en Matemática



Gráfica realizada por estudiantes.

Pamela Chirino
Lorena del Valle López

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Pamela Chirino

Profesora en Matemática, egresada de la Universidad Nacional de Villa María. Diplomada en Enseñanza de la Matemática con Nuevas Tecnologías. Estuvo a cargo de espacios curriculares de la formación específica del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la ENS "Gral. Manuel Belgrano". Actualmente se desempeña en asignaturas asociadas al aprendizaje de la matemática en el IPET N°49 y en carreras docentes y técnicas del INESCER "Dr. Ángel Diego Márquez". Además participó en líneas de acción de la DGES colaborando con la escritura e implementación de propuestas pedagógicas en las cátedras Problemáticas del Análisis Matemático I y II en Profesorados de Educación Secundaria en Matemática de la Provincia de Córdoba

Lorena del Valle López

Profesora de Educación Secundaria en Matemática, egresada del IES Arturo Capdevilla, Cruz del Eje. Especialista de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria por el Programa Nacional de Formación Permanente. Estuvo a cargo de espacios curriculares de la formación específica del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, E.N.S Juan Bautista Alberdi, anexo Villa María de Río Seco y del Profesorado de Educación Primaria e Inicial de la E.N.S Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Deán Funes. Actualmente se desempeña en las unidades curriculares de Matemática y Física en el nivel medio en la E.N.S Juan Bautista Alberdi y el IPET y A N°53 Fray Luis Beltrán. Además, participó en líneas de acción de la DGES asociadas al Aprendizaje de Elementos de la Aritmética y del Álgebra, Modelización Matemática y Análisis Matemático.

La evolución de la comprensión de los significados del concepto "derivada" en estudiantes de un Profesorado en Matemática

The evolution in the understanding of the meaning of derivatives in students of teaching mathematics

Pamela Chirino *
Lorena del Valle López **

Fecha de recepción: 30 de Abril de 2021
Fecha de aceptación: 3 de Junio de 2021

RESUMEN

La presente comunicación intenta mostrar una síntesis de la evolución de la comprensión de los significados del concepto derivada de un grupo de estudiantes de 3.º año de un Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, en el marco de la línea de acción de la Dirección General de Educación Superior de la Provincia de Córdoba "Formación en entornos virtuales en los Profesorados en Educación Secundaria en Matemática en zonas de vacancia de la provincia de Córdoba". Al ser enfrentados a situaciones problemáticas no estructuradas,[1] los estudiantes desplegaron diferentes habilidades que posibilitaron el desarrollo de una forma de trabajo con los objetos matemáticos acordes a las tendencias actuales de aprendizaje del cálculo infinitesimal.[2] Para describir la evolución de los significados de los conceptos, mostraremos las producciones de los estudiantes en tres momentos: al resolver las primeras tareas de la secuencia didáctica, al afrontar la instancia evaluativa y al solucionar una actividad que integraba saberes de todo el año. Acompañamos el relato con la descripción de algunas situaciones que nos obligaron a tomar decisiones de carácter didáctico en función de lograr nuestros objetivos.

palabras clave
formación docente · enseñanza del cálculo · derivada

Contactos
* pamelatchirino@yahoo.com.ar ; **lorenadelvallelopez@gmail.com ;

1 Llamamos situaciones no estructuradas a todas aquellas tareas que son presentadas a los estudiantes sin que ellos se encuentren familiarizados previamente con la/s técnica/s específica/s para resolverlas.

2 Desde hace alrededor de 40 años la evolución didáctica asociada al análisis matemático tiende a la construcción de los saberes a través de múltiples estrategias que promueven la exploración en diferentes escenarios para evidenciar características, propiedades y relaciones de los objetos, replanteando la mirada de la apropiación de los conceptos sólo por el desarrollo algorítmico y el dominio de las definiciones abstractas.

ABSTRACT

This paper synthesizes the evolution in the understanding of the meaning of derivatives of a group of students from a third grade of a secondary school that train students for teaching Mathematics within the framework of the General Direction of higher education of the Córdoba "Training in virtual environments in Secondary Education Teacher Training Courses in Mathematics in vacant areas of the province of Córdoba". The students, when confronted with unstructured problems, adquired several skills that made possible the development of a way of working with mathematical objects in agreement with the current trends of learning infinitesimal calculus. In order to describe the evolution of the meanings of the derivative concepts, we show the students' production in three different moments: when solving the first tasks of the didactic sequence, when facing the evaluation instance and when solving an activity that integrated the knowledge acquired from the whole year. We further provide the description about some situations that forced us to make didactic decisions in order to achieve our objectives.

keywords

teacher training · calculus teaching · derivative

Introducción

A continuación, mostraremos fragmentos de las producciones realizadas en el año 2017 por estudiantes de 3° año al trabajar en torno al aprendizaje de la derivada. El grupo de estudiantes pertenece a la Escuela Normal Superior Juan Bautista Alberdi, Anexo Villa de María de Río Seco, y el espacio curricular es Problemáticas del Análisis Matemático II del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. La experiencia se realizó en el marco de la línea de acción de la Dirección General de Educación Superior de la Provincia de Córdoba (DGES) "Formación en entornos virtuales en los Profesorados en Educación Secundaria en Matemática en zonas de vacancia de la provincia de Córdoba", que tenía por objetivo cubrir unidades curriculares con docentes que tengan experiencia y formación específica en el Nivel Superior y fortalecer, actualizar y renovar las prácticas de enseñanza de la Matemática en este nivel.

En términos acotados, podemos contar que la línea de acción en este espacio curricular consistía en acompañar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los futuros docentes, proponiendo una serie de tareas a resolver durante el cursado que potenciaran la comprensión de los procesos variacionales asociados al cálculo infinitesimal. En ese marco de trabajo, se realizó, previo al inicio de cursado, un análisis de las trayectorias de los estudiantes en relación con sus conocimientos de Análisis Matemático. Nos encontramos con una situación compleja que, por un lado, evidenciaba un cursado de Problemáticas del Análisis Matemático I asociado mayoritariamente a la ejecución de técnicas y destrezas y que, por otro lado, tenía a más de la mitad de los estudiantes en condición de libre.[3] Ese análisis determinó una reorganización del cursado de Problemáticas del Análisis Matemático II que se tradujo en dos acciones específicas: establecer un apoyo tutorial a los estudiantes para que acrediten Problemáticas del Análisis Matemático I y reestructurar las tareas y los contenidos específicos para este espacio curricular. Finalmente, la Prof. Pamela Chirino, integrante del grupo de DGES, elaboró una serie de actividades que, en consenso con la Prof. Lorena López, a cargo del espacio curricular en el instituto de Nivel Superior, fueron implementadas con los estudiantes de 3.º año.

La elaboración de la secuencia didáctica consistió en una serie de situaciones problemáticas que apuntaban a la comprensión de los procesos variacionales y que, poco a poco, instalaban los conceptos asociados a la derivada e integrales. A través de esas actividades se buscaba no sólo promover y resignificar el aprendizaje de los objetos matemáticos sino también colaborar con la formación integral del futuro docente de Matemática complementando su formación en la tarea de enseñar. En ese sentido, se promovió el uso de herramientas informáticas, se articuló con Problemáticas del Análisis Matemático I y se establecieron marcos de trabajo grupales con momentos de socialización, debate y construcción de significados. La comunicación entre las docentes y los estudiantes también estuvo mediada por el uso del foro en el Aula Virtual de la institución. En ese espacio, se formularon preguntas disparadoras que permitían que la Prof. Pamela Chirino, quien no estaba regularmente presente en las clases, tuviera indicios de cómo se iban logrando los aprendizajes y acompañara los procesos de enseñanza que formulaba la Prof. Lorena López.

3 Se considera estudiante libre a todo aquel estudiante que no logró dar cuenta de los aprendizajes necesarios para ser un estudiante regular, obteniendo calificaciones inferiores a 4 (cuatro) durante el cursado anual. Esta situación implica que, para finalizar un espacio curricular, es necesario rendir un examen final de mayor complejidad que el que realiza un estudiante regular.

“La elaboración de la secuencia didáctica consistió en una serie de situaciones problemáticas que apuntaban a la comprensión de los procesos variacionales y que, poco a poco, instalaban los conceptos asociados a la derivada e integrales.”

Tendencias actuales para la enseñanza del cálculo infinitesimal

No es una novedad que el cálculo infinitesimal debería ser aprendido con el dinamismo que caracteriza los fenómenos variacionales; sin embargo, la fuerza predictiva del cálculo infinitesimal asociada a las certezas que brindan los marcos algebraicos promovieron una enseñanza abocada a la presentación de rígidas (eficaces y seguras) estructuras algorítmicas que solucionan un conjunto de problemas con el convencimiento de que esta modalidad de aprendizaje traería implícita la comprensión de los sentidos variacionales y la aplicación de esos sentidos a diversas situaciones. Dolores (2000, p. 157) cita a Sierpinska, Wenzelburger, Artigue, Vinner, Selden, Mason, y termina concluyendo:

> Los investigadores en este campo coinciden en que, cantidades significativas de estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente comprenden el para qué de esos algoritmos que realizan y el significado de los conceptos. Inclusive, difícilmente logran asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación, a pesar de que históricamente del estudio de estos últimos se originaron las ideas claves del CD.

Ese supuesto de que el modelo tradicional de enseñanza del cálculo traería aparejado una comprensión de las evidencias variacionales ha sido descartado desde hace unos cuantos años, al menos para la mayoría de los estudiantes. Badillo (2003) sintetiza investigaciones de varios autores en relación con las dificultades de la comprensión de la derivada y muestra que ya en 1983 Orton indicaba que "las dificultades que tienen los estudiantes con la interpretación gráfica de la derivada puede ocurrir en el caso de una línea recta, y no sólo con curvas más complicadas". Por otro lado, Cantoral y Mirón (2000, p. 269) expresan:

> la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación.

Sin embargo, no se puede negar que las realidades culturales impedían, hasta hace no muchos años, imaginar nuevos formatos de abordaje de los conceptos: ¿cómo hacer accesible la cuantificación de las variables y sus variaciones no sólo para predecir sino también para aproximar, comparar o estimar teniendo como únicos recursos la aplicación de técnicas algebraicas o el análisis de gráficos estáticos en reducidos tiempos escolares? Esta complejidad ha perdido fuerza gracias al surgimiento de softwares computacionales que complementan la tarea tanto del que enseña como del que aprende, permitiendo el estudio del cambio desde nuevas perspectivas.

"...¿cómo hacer accesible la cuantificación de las variables y sus variaciones no sólo para predecir sino también para aproximar, comparar o estimar teniendo como únicos recursos la aplicación de técnicas algebraicas o el análisis de gráficos estáticos en reducidos tiempos escolares?."

En concordancia con esta nueva realidad, el diseño curricular de la Provincia de Córdoba para los Profesorados de Educación Secundaria en Matemática orienta desde 2010 la enseñanza de Problemática del Análisis Matemático II con sugerencias como "Promover el uso de herramientas informáticas, en particular software de graficación, para la comprensión de las problemáticas abordadas y los procesos de modelización involucrados", "Promover experiencias que permitan valorar el potencial de las herramientas del Análisis Matemático en relación comparativa a las pertenecientes a otros campos", " Promover la investigación sobre los métodos utilizados a lo largo de la historia para resolver el problema de la razón de cambio, antes del definitivo establecimiento del lenguaje del cálculo" (2010, p. 54).

Es así que, siguiendo las recomendaciones de diversos autores como Bishop (1999),

 ISSN 2422-5975, en línea

quien tajantemente indica que "un curriculum dirigido al desarrollo de técnicas no puede ayudar a comprender, no puede desarrollar significados, no puede capacitar al alumno para que adopte una postura crítica dentro o fuera de las matemáticas" (p. 26), y del Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba, se planteó a los estudiantes una serie de tareas acordes a las nuevas perspectivas.

El concepto de derivada y los significados asociados

Cuando hablamos del concepto de derivada, los profesores de Matemática pensamos en una definición asociada a la noción de límite.

Spivak (1999, p. 201) define:

La función f es **derivable** en a si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existe.}$$

En este caso $f'(a)$ y recibe el nombre de **derivada de f en a**. (Decimos también que f es derivable si f es **derivable** en a para todo a del dominio de f).

Sin embargo, no podríamos decir que la sola enunciación de la definición o el cálculo de una derivada aplicando límites involucra una compresión del concepto. Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013, p. 147), citando a Sierpinska, indican:

> Comprender el concepto será concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la "estructura" del objeto (la estructura es la red de sentidos de las sentencias consideradas). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión.

Podríamos decir, por lo tanto, que la comprensión de la derivada en un estudiante será evidenciada cuando muestre una integración entre objetos como pendiente de la recta tangente, tasa de variación instantánea, límite del cociente incremental y estrategias de derivación numéricas, analíticas y gráficas, aplicando esas nociones en variados contextos, incluyendo justificaciones de las conclusiones a las que arribe. Sánchez-Matamoros-Garcia, García Blanco y Llinares Ciscar, S. (2008, p. 292) indican que la comprensión de la derivada se desarrolla en tres ámbitos:

> El primero ocurre en la relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental, que dan forma a la derivada de una función en un punto; el segundo en los sistemas de representación, cuya integración origina una dimensión necesaria para el desarrollo de la comprensión; el tercero en la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada y el operador derivada.

"Podríamos decir, por lo tanto, que la comprensión de la derivada en un estudiante será evidenciada cuando muestre una integración entre objetos como pendiente de la recta tangente, tasa de variación instantánea, límite del cociente incremental y estrategias de derivación numéricas, analíticas y gráficas, aplicando esas nociones en variados contextos, incluyendo justificaciones de las conclusiones a las que arribe."

Las primeras tareas

Las actividades más relevantes abordadas en esa primera etapa del año fueron las actividades 1.1, 4.2 y 4.6 presentes en Problemáticas del Análisis Matemático I de la colección "Matemática en la Formación Docente" de la DGES (2020) . También se siguieron las recomendaciones presentadas para el primer cuatrimestre en Problemáticas del Análisis Matemático II de la misma colección.

Gracias a la resolución de las actividades, logramos que los estudiantes se familiaricen con el software Geogebra,[4] se acostumbren a proponer caminos de resolución de las tareas sin necesidad de seguir las indicaciones del profesor y justifiquen sus acciones y resultados obtenidos.

Las situaciones que surgían en clase nos brindaban información de las ideas que se formaban en los estudiantes. Por ejemplo, en una actividad les brindamos la expresión algebraica de varias rectas tangentes a una función y les consultamos si consideraban posible construir la función que daba origen a esas rectas tangentes, tarea que por cierto nos llevó mucho más tiempo que el previsto, obteniendo una respuesta como: "no podemos obtener las imágenes necesarias para realizar la gráfica exacta, ya que si tomamos como punto de partida al día 30 como 0 y su respectiva imagen como 41,83 para nosotros es imposible graficar esta supuesta función con los datos que nos dieron, ya que conocemos las pendientes de las rectas tangentes a ese punto de la función pero no la imagen en ese momento".

En otra ocasión, les brindamos las rectas tangentes de una función en x = 2 y x = 17, y les consultamos si la recta secante que pasa por esos dos puntos es mejor aproximadora de la función, en esos puntos, que las dos rectas tangentes. Ellos respondieron: "no es mejor aproximadora (...) podría darse el caso de que se elijan dos puntos entre los cuales la función pase de crecer a decrecer en una o más ocasiones (...) en el gráfico aquí presentado la pendiente de la recta secante es positiva y la función no es estrictamente creciente, sino que de a momentos crece y de a momentos decrece". Acompañaron su explicación con una representación gráfica de lo que estaban pensando:

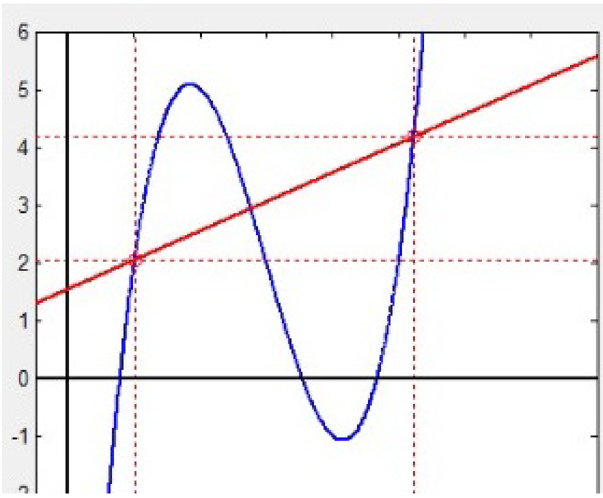


Figura 1: *Gráfica elaborada por estudiantes.*

En otra ocasión, les brindamos el gráfico de una función y les solicitamos que tracen "a ojo" tres rectas tangentes diferentes, y que estimen las ecuaciones de esas rectas tangentes. En ese contexto, los estudiantes trazaron tres rectas tangentes, una cuando la función crece, otra cuando decrece y otra cuando es constante, y estimaron numéricamente la pendiente de esas rectas tangentes, usando la siguiente simbología:

$$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{58{,}11-68{,}14}{3-2} = -10{,}03 \qquad R3 \simeq -10{,}03t + 84$$

Similar procedimiento utilizaron en el caso de la recta tangente creciente y constante, pero aclararon: "la limitación es que no tenemos valores exactos de los puntos, por

4 Geogebra es un software dinámico y gratuito que permite la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

 ISSN 2422-5975, en línea

lo tanto sólo podemos estimar las razones de cambio en las proximidades de los puntos fijados. Necesitaríamos datos más precisos". Otro grupo expresó: "nunca la recta secante va a ser mejor aproximadora que la recta tangente, porque la recta secante da un incremento de Δy sobre Δx de 2 a 17; en cambio, con la recta tangente el incremento es mínimo, es decir, el incremento tiende a 0".

De todas formas, queremos contar que no todas las apreciaciones de los estudiantes salían tan acabadas; en oportunidad de brindarles ecuaciones de rectas tangentes de una función y pedirles que interpreten la tasa de cambio instantánea de cada una de ellas, las expresiones de los estudiantes fueron bastantes disímiles: "no tenemos que realizar la primera derivada, porque ya está derivada", "hay que sacar la razón de cambio", "no hay que sacar razón de cambio sino que hay que obtener la razón de cambio instantánea", "hay que evaluar la función en 2 y 17", "tenemos que aplicar el Teorema de Rolle", "a mí me parece que después de valuar la función tendríamos que hacer $\Delta y / \Delta x$ ".

El trabajo evaluativo

Uno de los desafíos que afrontamos consistía en generar un espacio de acreditación de saberes que no se acotara a la aplicación de técnicas rutinarias, sino que pusiera en evidencia el aprendizaje de una forma de pensar y trabajar matemáticamente acorde a lo planteado en esa primera parte del ciclo lectivo y que incluyera la exploración de los significados de la derivada de manera integral a través de representaciones gráficas, algebraicas, verbales y numéricas. Así, decidimos proponer a los estudiantes el siguiente enunciado:

> Un nuevo productor decide lanzarse hacia la comercialización de aceite de oliva. Para establecer los costos, sabe que tiene que considerar la compra de los envases plásticos para embotellar los productos. Entonces se pregunta: ¿conviene fabricar recipientes cilíndricos o prismáticos? Ayuda a este productor a decidir.

"Uno de los desafíos que afrontamos consistía en generar un espacio de acreditación de saberes que no se acotara a la aplicación de técnicas rutinarias, sino que pusiera en evidencia el aprendizaje de una forma de pensar y trabajar matemáticamente acorde a lo planteado en esa primera parte del ciclo lectivo y que incluyera la exploración de los significados de la derivada de manera integral a través de representaciones gráficas, algebraicas, verbales y numéricas."

La situación propuesta es solo una reformulación de los clásicos problemas de optimización presentes en cualquier guía para aprender derivadas, en la que no incluimos información numérica ni la solicitud de la búsqueda de un mínimo. Tampoco sugerimos estrategias de justificación de las decisiones, pero ellos sabían muy bien que debían justificar sus producciones.

Con respecto al espacio formal para resolver la instancia evaluativa, notamos que al no enmarcarse en la aplicación de técnicas rutinarias no podía desarrollarse en pocos días.

 ISSN 2422-5975, en línea

Tampoco nos parecía conveniente solicitar la entrega de manera individual sino que decidimos valorar los beneficios del trabajo colaborativo y optamos por pedir un trabajo realizado en grupos de dos o tres estudiantes. Fue así que a mediados del ciclo lectivo, presentamos el formato de acreditación de esta etapa con la condición de que debía ser entregada al regreso del receso invernal. Como la mayoría estuvo abocada a estudiar para aprobar Problemáticas del Análisis Matemático I, decidimos extender la fecha de entrega haciéndoles saber que el trabajo no se desarrollaría en horas de clase sino que debía ser concluido en momentos extra áulicos.

Por un lado, debemos destacar que las presentaciones superaron ampliamente nuestras expectativas porque no estuvieron acotadas a lo estrictamente matemático sino que avanzaron en otros aspectos. Cada grupo realizó una investigación acerca de las características que tienen los envases hablando de la función que cumplen, las ventajas y desventajas de los materiales con los cuales se pueden realizar, los aspectos a evaluar al momento de elegir el envase, los factores que determinan el costo, las partes que componen una botella de plástico, las técnicas para moldear una botella o la influencia de la densidad del líquido que contiene, e inclusive la problemática que representan para el medio ambiente.

En cuanto a los aspectos de la resolución de la tarea deseamos destacar:

- la toma de decisiones para enfrentar la situación problemática,
- la explicación de los modelos algebraicos elaborados,
- la interpretación del valor numérico de la pendiente en relación con el problema,
- la asociación de una forma particular de la ecuación de la recta tangente a la existencia de un máximo o un mínimo,
- el reconocimiento de la derivada como una tasa de cambio instantánea,
- la organización de la información en tablas de valores para abordar conclusiones.

La toma de decisiones para enfrentar la situación problemática

Como la información brindada por la consigna era tan acotada, los estudiantes se vieron obligados a tomar decisiones que incluían lo numérico, lo algebraico y también lo estratégico.

Con respecto a lo numérico, debieron establecer el volumen total del envase con el cual realizarían el trabajo exploratorio: "lo ayudaremos de la siguiente manera, suponiendo que los envases contendrán 1000 cm^3 de aceite", otros usaron 1500 cm^3 o 5 litros, hablaron de unidades de capacidad y volumen e incluso justificaron la elección de las unidades: "tomamos, para darle forma a la gráfica, los centímetros porque con los mismos la gráfica se muestra más amplia para ser estudiada, en cambio con decímetros queda muy reñida".

En cuanto a lo algebraico, algunos grupos expresaron: "tomaremos para calcular el área de la base del cilindro $d/2$ para poder comparar con las dimensiones de un envase prismático".

Otra cuestión destacable, consecuencia de que el enunciado no especificaba de cuántas caras tenía que ser el prisma, es que, si bien todos los grupos construyeron las expresiones algebraicas del área total del cilindro y del prisma cuadrangular y aplicando técnicas de derivación abordaron sus primeras conclusiones, un grupo de estudiantes investigó qué sucede con el área total para una capacidad de un litro en cuatro cuerpos diferentes: cilindro, prisma triangular, prisma cuadrangular y prisma oc-

FORMA DEL ENVASE	CILINDRICA	PRISMATICA		
ÁREA TOTAL DE PLASTICO A UTILIZAR dm²	5,54	Triangular	Cuadrangular	Octangular
		6,23	6	5,56

Figura 2: *Tabla elaborada por estudiantes.*

togonal. Resumieron sus conclusiones en una tabla: *Ver arriba [Figura 2]*

Luego de la construcción de esa tabla, el grupo estableció conclusiones, algunas asociadas a la situación problemática propuesta como "en un litro nos damos cuenta de que es más recomendable producir un envase cilíndrico, porque consume la menor cantidad de plástico", y otras conclusiones asociadas a lo estrictamente matemático como "a medida que el prisma va adquiriendo más lados en su base, va disminuyendo su área total, y a medida que aumentan sus caras el prisma va tomando forma cilíndrica". Otro grupo que también amplió la exploración de un envase prismático expresó: "en el caso del prisma cuadrangular, el que usa menos plástico, es que se acerca al cubo".

Explicación de los modelos algebraicos elaborados

Tal cual como se trabajó en el año, los estudiantes acompañaron sus desarrollos matemáticos con justificaciones verbales respecto de las características que les permitieron elaborar los modelos algebraicos asociados. A continuación, mostramos las expresiones utilizadas por un grupo de estudiantes al explicar cómo elaboraron la expresión para el Área total de un prisma de base cuadrada:

Tenemos las incógnitas de las dimensiones del prisma. Por un lado tenemos $\mathbf{x^2}$ que sería la base, y una segunda $\mathbf{x^2}$ que representaría la tapa del envase, quedándonos $\mathbf{2x^2}$ por tener dos bases, otra incógnita que tenemos es **y** representando la altura.

Nuestro objetivo es minimizar el área total del envase, a la función con que vamos a trabajar la llamaremos área total (AT).

Comenzaremos con el área de la base, como sabemos que es un cuadrado será $\mathbf{2x^2}$, al lateral tendremos cuatro caras iguales, las cuatro serán rectángulos, quedando determinada $\mathbf{4xy}$, a partir de esto obtenemos la función del área total

$$\mathbf{AT = 2x^2 + 4xy}$$

Figura 3: *Explicación elaborada por estudiantes.*

Otro grupo explica el trabajo algebraico necesario para conocer la menor cantidad de material utilizado en la construcción de un cilindro:

Para determinar cuál es la menor cantidad de material que usaremos en el envase, debemos optimizar la fórmula del área total, $\mathbf{A_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h}$ pero lo haremos con respecto a una sola variable por lo que reemplazamos "**h**", en la fórmula de $\mathbf{V_c = \pi.r^2.h}$ obtenemos que $\mathbf{h = \frac{V_c}{\pi.r^2}}$
Ahora reemplazamos en la fórmula del área total

$$\mathbf{A_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.\frac{V_c}{\pi.r^2}}$$

Figura 4: *Explicación elaborada por estudiantes.*

Interpretación del valor numérico de la pendiente en relación con el problema

Este es uno de los aspectos que más nos interesaba evaluar, que los estudiantes lograran transferir todo ese bagaje de significados creados en torno a la derivada a una situación nueva y desconocida.

Un grupo muestra cómo es posible aprovechar los recursos informáticos al trazar la recta tangente a la función Área total e interpretarla en relación con la situación problemática propuesta. Una vez que construyen la expresión Área Total del prisma, la grafican y trazan tres rectas tangentes, una cuando el área crece, otra cuando decrece y otra cuando es constante. Luego aprovechan los recursos de Geogebra y obtienen el valor de la pendiente de esas rectas e interpretan ese número en relación con el problema.

A continuación, vemos la gráfica presentada:

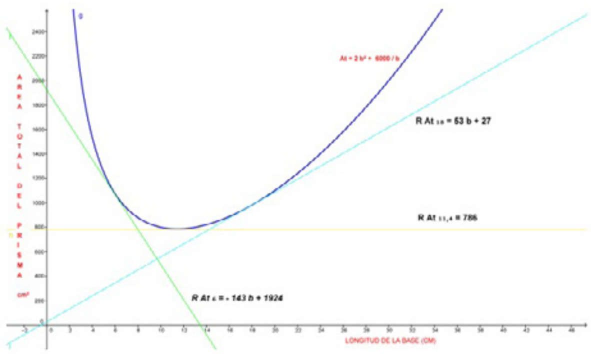


Figura 5: *Gráfica elaborada por estudiantes.*

Una de las interpretaciones realizadas por las estudiantes fue la siguiente: "La recta tangente RAT6=-143b+1924, cuya pendiente es -143, indica que el área total del prisma, para esa longitud de la base, va a estar disminuyendo 143 cm2 por cada cm que aumente la longitud de la base". Otro grupo de estudiantes, en cambio, construye las expresiones algebraicas del Área total de un cilindro y de un prisma y compara las pendientes de sus rectas tangentes en diferentes puntos. Aquí unas de las gráficas planteadas:

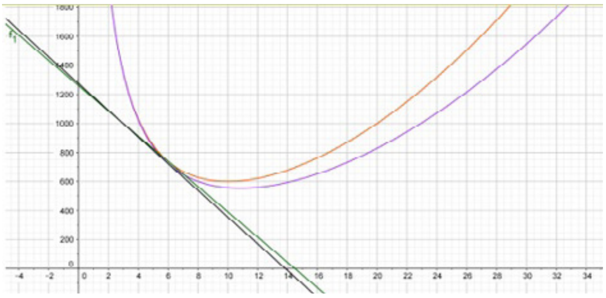


Figura 6: *Gráfica elaborada por estudiantes.*

Esta gráfica les permite realizar interpretaciones que evidencian el análisis de lo variacional. Reconocen semejanzas entre las rectas tangentes cuando el diámetro o la longitud de la base es 6 cm, "en ambos casos las rectas tangentes son decrecientes", a su vez reconocen que hay una de ellas cuya pendiente tiene una variación negativa mayor, "a medida que aumenta el diámetro o la arista del prisma va a disminuir el área, pero en el caso del cilindro lo hará a una mayor velocidad, es decir, alcanzará en el mismo momento un área mucho menor".

Asocian una forma particular de la ecuación de la recta tangente a la existencia de un máximo o un mínimo

Es una situación reiterada que en un curso de cálculo infinitesimal la existencia de un máximo o un mínimo esté estrictamente asociada al proceso de derivar una función, igualarla a cero y luego despejar una incógnita, ignorando que existen otros elementos que también visibilizan la existencia de esos puntos críticos. Debido al formato de trabajo y al tipo de problemas resueltos, algunos grupos de estudiantes lograron evidenciar que la recta tangente a una función con pendiente igual a cero da indicios de la existencia de un máximo o un mínimo. Uno de los grupos lo expresa de la siguiente manera:

> La recta tangente **R A** $t_{11,4}$= **786**, cuya pendiente es cero, nos indica que en el momento que la longitud de la base es igual a 11,4 cm el Área total del envase no está aumentando ni disminuyendo, y por lo tanto puede que se encuentre en un valor máximo o mínimo.

Figura 7: *Explicación elaborada por estudiantes.*

Otro grupo realiza una descripción similar: "se aprecia en el gráfico anterior que las tangentes de los mínimos de las funciones son rectas constantes, lo que enuncia que sus pendientes son iguales a cero, por lo tanto, sus primeras derivadas en esos puntos tienen el mismo valor". Ellos acompañan lo que expresan con el gráfico correspondiente:

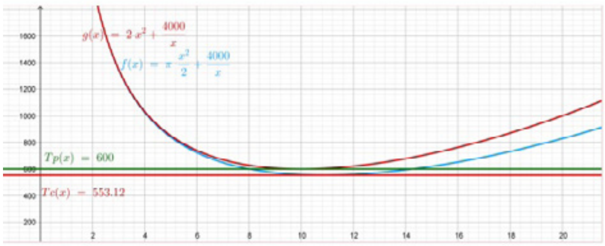


Figura 8: *Gráfica elaborada por estudiantes.*

Reconocimiento de la derivada como una tasa de cambio instantánea

El reconocimiento de que la variación que cuantifica una derivada es una variación puntual, local, no extensible a otros puntos del dominio de una función, suele ser difícil de constatar por los docentes cuando las situaciones propuestas a los estudiantes están limitadas a la gráfica de una función o a la obtención de máximos o mínimos. Sin embargo, si los estudiantes deben dar cuenta de sus procesos y conclusiones, es más factible visibilizar la comprensión que tienen acerca de los fenómenos matemáticos aprendidos. En este caso, el hecho de establecer conclusiones acerca del envase a elegir en paralelo a la interpretación de la pendiente permite que un grupo de estudiantes explicite claramente que la tasa de cambio encontrada se produce "para esa longitud de la base", lo cual evidencia la comprensión de que no se trata de una tasa de cambio que se mantenga para otros puntos del dominio.

> La recta tangente **RAT$_{18}$=38d+157**, cuya pendiente es 38, significa que el área total del prisma, para esa longitud de la base, va a estar aumentando 38 cm^2 por cada cm que aumente la longitud del diámetro.

Figura 9: *Explicación elaborada por estudiantes.*

Organización de la información en tablas de valores para abordar conclusiones

El diseño curricular de los Profesorados de Educación Secundaria en Matemática establece una serie de condiciones iniciales acerca de la Matemática y la formación de docentes. Entre esas condiciones, expresa que "tiene sentido hablar de una actividad matemática desde una significación abarcativa que incluya tanto las primeras exploraciones y aproximaciones en la búsqueda de soluciones a estos problemas como la formalización necesaria para la comunicación y presentación de resultados" (2010, p. 10). En función de esa expresión es que rescatamos como muy valorable que los estudiantes elaboren sus propias estrategias de organización de la información, dado que esa actividad es parte de un saber hacer matemático. Este saber hacer matemático no sólo les permite comunicar los resultados de forma ordenada y coherente sino que también les facilita la elaboración de las conclusiones

A continuación, vemos la tabla elaborada por un grupo de estudiantes para resumir las rectas tangentes según la exploración que realizaron del prisma o del cilindro:

b: longitud de la base del prisma	Rectas tangentes al Área total del envase en b
6	$\mathrm{RA}\,t_6 = -143\,b + 1924$
11,4	$\mathrm{RA}t_{11,4} = 786$
18	$\mathrm{RA}t_{18} = 53\,b + 27$

Figura 10: *Tabla elaborada por estudiantes.*

d: longitud del diámetro del cilindro	Rectas tangentes al Área total del envase en d
8	$\mathrm{RA}\,t_8 = -69d + 1400$
12,4	$\mathrm{RA}t_{12,4} = 726$
18	$\mathrm{RA}t_{18} = 38\,d + 157$

Figura 11: *Tabla elaborada por estudiantes.*

Luego, enuncian la siguiente conclusión:

> Sabiendo que para construir un envase, para la conservación del aceite de 1500 cm^3 de forma prismática se necesitan 786 cm^2 de material plástico, y de forma clíndrica se necesitan 726 cm^2 del mismo material (60 cm^2 menos) recomendamos al comerciante utilizar envases de forma cilíndrica, ya que la capacidad del envase es la misma pero los gastos en material para la fabricación será menor, por la variación de material utilizado.

Figura 12: *Explicación elaborada por estudiantes.*

Las formas de trabajo matemático luego de la primera instancia evaluativa

La instancia evaluativa asociada al aprendizaje de la derivada tuvo muchas instancias de retroalimentación en las cuales la Prof. Lorena López guiaba a los estudiantes para ir mejorando las estrategias aplicadas. Sin embargo, notamos que la palabra "derivada" aparecía marcadamente en los desarrollos algebraicos y no surgía con fluidez cuando trabajaban desde los aspectos gráficos o cuando daban explicaciones de la pendiente de la recta tangente. De algún modo, no podíamos asegurar que esa red de significados estaba construida realmente para todos, pero sabíamos que aún existía la posibilidad de volver a indagar sobre esos saberes, porque la secuencia para el aprendizaje de integrales implicaba aflorar los conocimientos de derivadas.

Es así que, luego de hacer las actividades 2.2, 2.3 y 2.4 presentes en Problemáticas del Análisis Matemático II de la colección "Matemática en la Formación Docente", las cuales delimitaban un camino en el que la integral no era presentada como una antiderivada sino que se buscaba primero construir el significado de la integral definida, les propusimos a los estudiantes encontrar relaciones entre las pendientes de las rectas tangentes de $e(t)$ y las imágenes de la función $V(t)$.

Velocidad del móvil	Espacio recorrido
$V(t) = t^2$	$e_1(t) = \frac{t^3}{3}$
$V(t) = 3$	$e_2(t) = 3t$
$V(t) = 2t$	$e_2(t) = t^2$

Figura 13: *Tabla de análisis propuesta a los estudiantes*

Los estudiantes aprovecharon los recursos de Geogebra, y para cada una de las funciones e_i, trazaron algunas rectas tangentes y observaron la pendiente de sus rectas tangentes.

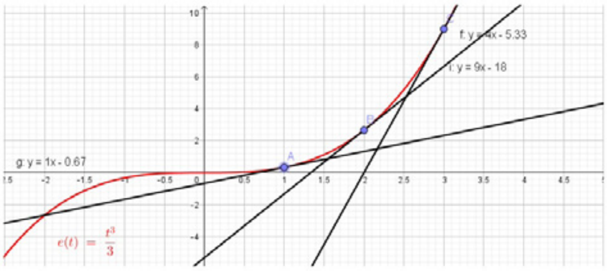


Figura 14: *Gráfica elaborada por los estudiantes*

Luego, organizaron la información en tablas como la siguiente:

Puntos(t) de la función $e(t)=t^3/3$	Pendientes de las rectas tangentes a e(t) en dichos puntos	Imágenes de la función $v(t)=t^2$
1	1	$1^2 = 1$
2	4	$2^2 = 4$
3	9	$3^2 = 9$

Figura 15: *Tabla elaborada por los estudiantes*

Y finalmente, elaboraron conclusiones como: "vemos que las imágenes de la derivada (función $V(t)$) coinciden con las pendientes de las rectas tangentes en los mismos puntos tomados en la función $e(t)$, por lo tanto podemos decir que $V(t)$ es la derivada de $e(t)$ y que al integrarla hemos obtenido la antiderivada, o lo que es igual, la primitiva de $e(t)$".

La forma autónoma con la que enfrentaron la actividad y el trabajo exploratorio que les permitió arribar a las conclusiones nos muestra que los estudiantes lograron esa integración de significados asociados a la derivada que deseábamos, y esto a su vez nos garantizaba que existían las conexiones suficientes para introducir el complejo e importante Teorema Fundamental del Cálculo.

Conclusión

Desde nuestra perspectiva, esta experiencia educativa nos permite sostener que es posible un aprendizaje de la derivada que priorice el análisis de los fenómenos variacionales como medio de interpretación y resolución de situaciones extra matemáticas en las cuales la derivada cobre un sentido y se resignifique. Ese nivel de comprensión puede lograrse si se asume que es válida la asignación de significados colectivos en el marco de una construcción y exploración de significados no lineal. El docente debe asumir una actitud abierta, crítica y flexible en contextos que no siempre resultan favorables, creyendo en un estudiante capaz de afrontar el camino de la construcción de los saberes, aun con conceptos tan complejos como los conceptos asociados al cálculo infinitesimal.

> *"...es posible un aprendizaje de la derivada que priorice el análisis de los fenómenos variacionales como medio de interpretación y resolución de situaciones extra matemáticas en las cuales la derivada cobre un sentido y se resignifique."*

Otra cuestión que consideramos, luego del recorrido realizado con este grupo de estudiantes, es que es necesario acompañar la potencialidad de las estructuras algebraicas con otro tipo de desafíos que permitan profundizar las tareas de cuantificar, describir y pronosticar fenómenos. Creemos que así estaremos más cerca de lograr que la mayoría de los estudiantes no piensen a la derivada como el valor que se obtiene al reemplazar un número en una fórmula obtenida luego de la aplicación de una técnica algebraica, sino que piensen en una tasa de cambio que puede ser obtenida mediante diversas estrategias, algunas más formales y exactas que otras. Conocer el valor numérico de una derivada, al menos de manera aproximada, permitirá describir la variación de un fenómeno en un punto, la extracción de conclusiones y la toma de decisiones relevantes.

> *"Conocer el valor numérico de una derivada, al menos de manera aproximada, permitirá describir la variación de un fenómeno en un punto, la extracción de conclusiones y la toma de decisiones relevantes."*

Nos queda el desafío de continuar pensando y debatiendo las situaciones que les presentamos a los estudiantes, en el sentido de acercarlos a problemas que les despierten curiosidad, que los inviten a formularse nuevas preguntas, que sean accesibles a su realidad cultural, que los proyecten como ciudadanos críticos y que los posicionen como futuros docentes comprometidos en mostrar una matemática que no queda dentro del salón de clases sino que trasciende esas paredes, no sólo por lo estrictamente conceptual sino también por las capacidades y habilidades que permite desarrollar, las cuales son válidas en múltiples contextos.

Referencias

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España. Recuperado de: https://www.tdx.cat/handle/10803/4702;jsessionid=76C8E794E365A80E6E9EC9414293AF9D#page=1

Bishop, A. (1999). Hacia una manera de conocer. En *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural* (pp. 17-38). Buenos Aires: Paidós.

Cantoral Uriza, R, y Mirón Shac, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 3(3), 265-292. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33503302

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coord.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp.155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dirección General de Educación Superior (2020). *Problemáticas del Análisis Matemático I. Matemática para la formación docente.* Recuperado de: https://dges-cba.infd.edu.ar/sitio/wp-content/uploads/2020/04/P_ANALISIS_MATEMATICO_I.pdf

Dirección General de Educación Superior (2020). *Problemáticas del Análisis Matemático II. Matemática para la formación docente.* Recuperado de: https://dges-cba.infd.edu.ar/sitio/wp-content/uploads/2020/04/P_ANALISIS_MATEMATICO_II.pdf

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2010). *Diseño curricular para el Profesorado en Educación Secundaria en Matemática*. Córdoba. Recuperado de: https://dgescba.infd.edu.ar/sitio/curriculares/upload/DISENIO_CURRICULAR_MATEMATI CA__2010.pdf

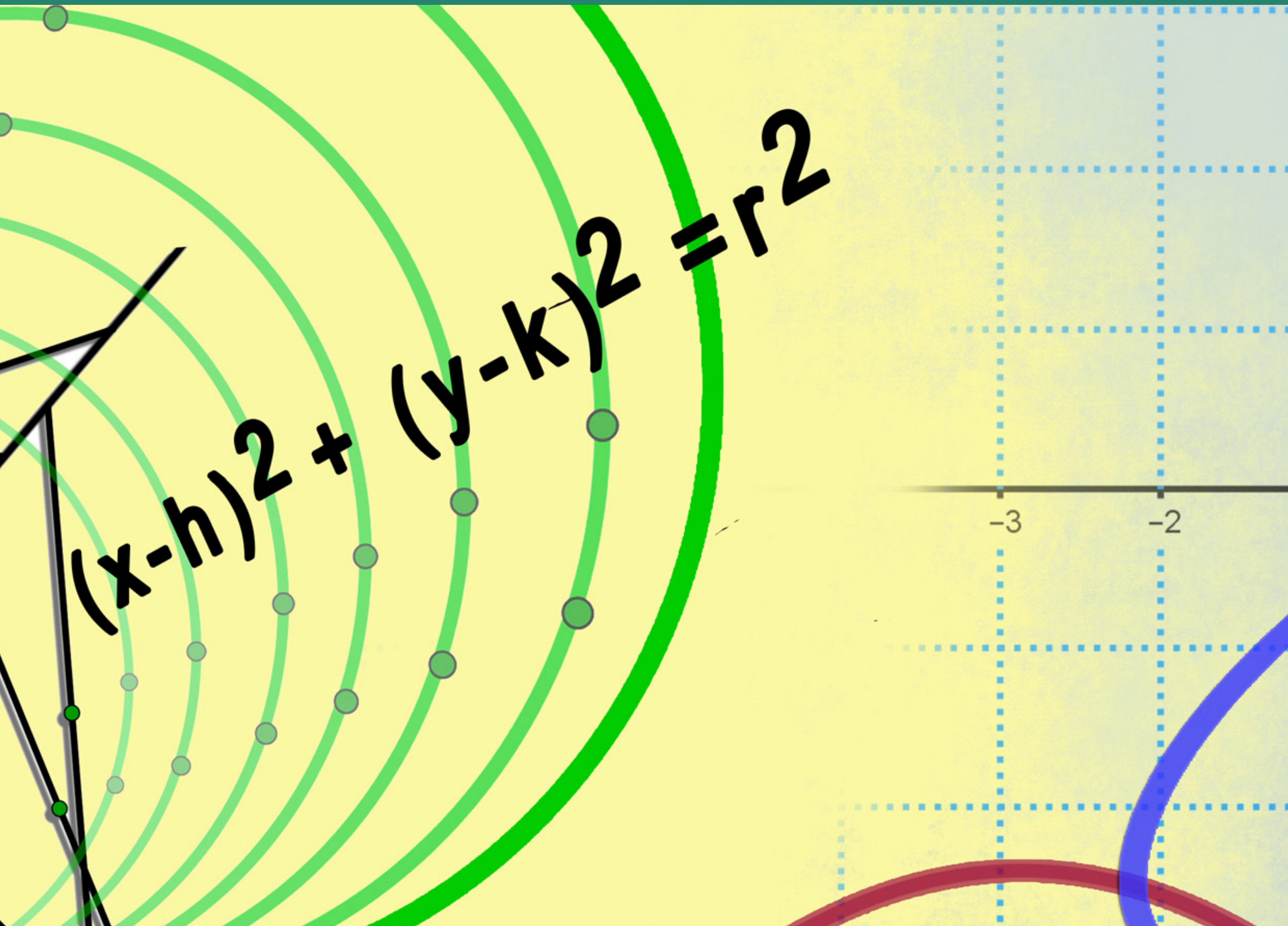
Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 123-150.

Sánchez-Matamoros-Garcia, G., García Blanco, M. M. y Llinares Ciscar, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), 267-296.

Spivak, M. (1999). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* México: Reverté.

De la geometría sintética a la analítica

Una experiencia con Geogebra para estudiar cónicas



Fotografía obtenida por los autores.

Sabrina Colombo
Natalia Heredia

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Sabrina Colombo

Profesora de Matemáticas, egresada del Instituto Parroquial Monseñor Luis Kloster (2015). Se desempeña como profesora de la formación específica en el Profesorado de Educación Matemática de la Esc. Normal Superior Maestros Argentinos Anexo Alejo Ledesma. Profesora de Didáctica de la Matemática y Modelización Matemática en las Ciencias en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática Inst. Parroquial. L. Kloster. Docente del Cenma Nº 196 W. Escalante. Participa desde 2017 en la línea de acción de la Dirección General de Educación Superior "Formación en entornos virtuales en los profesorados en Educación Secundaria en Matemática en Zonas de vacancia de la provincia de Córdoba".

Natalia Heredia

Profesora en Matemáticas, egresada de la Universidad Nacional de Villa María (2009). Profesora de la Formación Específica en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemáticas del Instituto Superior Jerónimo Luis de Cabrera de la ciudad de General Cabrera. Docente en el Instituto Secundario Manuel Belgrano de Villa María. Desde 2018 participa en la línea de acción de la Dirección General de Educación Superior "Formación en entornos virtuales en los profesorados en Educación Secundaria en Matemática en zonas de vacancia de la provincia de Córdoba"

De la geometría sintética a la analítica

Una experiencia con Geogebra para estudiar cónicas

From synthetic geometry to analytic. An experience with Geogebra to study conics

Sabrina Colombo *

Natalia Heredia **

Fecha de recepción: 05 de Mayo 2021
Fecha de aceptación: 07 de Junio 2021

RESUMEN

En este escrito se sintetiza una experiencia de enseñanza de la Geometría en la que se buscó desafiar una lectura lineal de los ejes de contenidos, apelando a tareas que permitan una construcción progresiva de los sentidos y conceptos fundamentales. Fue llevada a cabo con estudiantes de segundo año de un Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, implementando un software de geometría dinámica y dos recursos de registro por parte de los estudiantes: enciclopedia y portafolio.

palabras clave

geometría · cónicas · lugar geométrico · Geogebra · formación docente

ABSTRACT

This piece of writing summarizes a Geometry teaching experience in which a linear interpretation of the main contents has been challenged. A set of tasks which allow a progressive construction of the senses and main concepts has been proposed. The experience has been carried out by a group of students attending their second year of Mathematics Teacher-Training College. A dynamic geometry software has been implemented by the students, as well as two data registration resources: encyclopedia and portfolio

keywords

geometry · conical · geometric place · Geogebra · teacher training

Contactos

* sabrinacolombo86@gmail.com ; ** nataliaheredia818@gmail.com.

Introducción

Esta comunicación tiene la intención de narrar una experiencia de enseñanza de Geometría donde se propusieron tareas que buscaban promover la exploración, formulación de conjeturas e investigación para la construcción de contenidos introduciendo el uso de un software de geometría dinámica. Fue llevada a cabo en segundo año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemáticas (PESM), en la Escuela Normal Superior Maestros Argentinos, Anexo Alejo Ledesma, provincia de Córdoba (Argentina). Surgió a partir de una convocatoria, en el año 2019, dirigida a docentes del profesorado, en la línea de acción "Formación en entornos virtuales en los Profesorados en Educación Secundaria en Matemática en zonas de vacancia de la provincia de Córdoba", desde un equipo de trabajo articulado entre la Dirección General de Educación Superior (DGES) y la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF). Participó la Profesora Sabrina Colombo, docente del espacio curricular Problemáticas de la Geometría II, quien implementó en aula una secuencia[1] de tareas organizadas por el equipo técnico y trabajó colaborativamente con la Profesora Natalia Heredia.

Problemáticas de la Geometría II, según las definiciones del Diseño Curricular del PESM, es una unidad curricular que brinda la oportunidad de reelaborar en lenguaje algebraico las propiedades y caracterizaciones de las figuras planas, analizadas previamente en Problemáticas de la Geometría I. Esta reelaboración posibilita el acceso a nuevas definiciones, el establecimiento de relaciones y la exploración de un modo de argumentación enriquecido por el lenguaje y las propiedades del álgebra.

A partir de esta definición, entendemos que se debe abordar la geometría analítica desde la geometría sintética estudiada previamente, lo que no suele presentarse así. Al respecto, Gascón (2002) ha mostrado que la presunta controversia entre geometría sintética y geometría analítica es una falsa controversia, argumentando no sólo la continuidad sino también la complementariedad que existe entre ambas.

> *"...entendemos que se debe abordar la geometría analítica desde la geometría sintética estudiada previamente, lo que no suele presentarse así."*

En el mismo sentido, Gaita Iparraguirre (2014) señaló que "se ha encontrado que la enseñanza de la geometría analítica se realiza sin una problematización previa y sin establecer relaciones explícitas entre ella y la geometría de las formas", y justificó por medio de un estudio histórico epistemológico la emergencia de la geometría analítica a partir de problemas enunciados en contextos de geometría sintética. Itzcovich (2005, p. 11) plantea que "la preocupación principal gira en torno a cómo generar condiciones que permitan a los alumnos involucrarse en la producción de conocimientos geométricos", buscando a través de enunciados establecer relaciones entre el trabajo geométrico y el trabajo algebraico.

En este marco, la secuenciación de las actividades en la propuesta busca promover una entrada a la geometría analítica como superación de algunos límites de la geometría sintética, "dado que son precisamente las limitacio-

1 Disponible en la colección "Matemática en la Formación Docente": https://dges-cba.infd.edu.ar/sitio/wp-content/uploads/2020/04/PROBLEMATICAS_DE_LA_GEOMETRIA_II.pdf

nes de las *técnicas sintéticas* las que *dan sentido* (son las razones de ser) a las *técnicas analíticas*" (Gascón, 2002, p. 18). Esta secuenciación se aproxima a un posible recorrido de aprendizaje que incluye la construcción de sentido de los saberes y el involucramiento de los/as estudiantes en la actividad matemática, incorporando el uso de un software de geometría dinámica.

> *"...la secuenciación de las actividades en la propuesta busca promover una entrada a la geometría analítica como superación de algunos límites de la geometría sintética, "dado que son precisamente las limitaciones de las técnicas sintéticas las que dan sentido (son las razones de ser) a las técnicas analíticas" "*
>
> *(Gascón, 2002, p. 18).*

Como recurso para la construcción y el registro, propusimos la escritura de una "enciclopedia" donde se incluyan definiciones, propiedades, teoremas y demostraciones que vayan escribiendo a partir de lo trabajado en las diferentes clases de manera colaborativa en pequeños grupos. La escritura de la "enciclopedia" permite que las distintas cuestiones que forman parte usualmente de una sección teórica de un curso de Geometría puedan ser trabajadas con la participación de las y los estudiantes en su producción. Esto posibilita que ciertos saberes puedan ser elaborados por el colectivo sin recurrir a una transmisión directa y definitiva de un cuerpo previamente armado.

Por otro lado, el portafolio fue el recurso a través del cual las y los estudiantes dejaron registro del desarrollo de las tareas propuestas. Este posibilita dejar plasmados los procesos de resolución de los diferentes grupos de trabajo, convirtiéndose en una herramienta que permite recoger evidencias del proceso de aprendizaje.

La experiencia

Implementamos una secuencia de tareas exploratorias para estudiar las cónicas, en las que se busca integrar técnicas de geometría sintética y analítica, utilizando un software de geometría dinámica: Geogebra ®. Consideramos que se debe aplicar este tipo de recursos en la enseñanza de la Matemática, ya que, como afirma Álvarez (2014, p. 5), "establecen nuevas formas de razonar, sostener y presentar relaciones o propiedades de los objetos matemáticos por medio de la visualización, la exploración, la conjeturación y la corroboración gráfica". Incluimos entonces este recurso no sólo para la construcción y la visualización sino también para la elaboración de conjeturas.

La primera actividad propuesta implica tareas propias de la geometría sintética, como por ejemplo, construir una figura que cumple ciertas condiciones o hallar un lugar geométrico. Esta actividad exploratoria llevó a intentos fallidos de construcción, y nos encontramos desde el comienzo con una de las mayores dificultades: el uso del software. En algunos casos, las y los estudiantes nos plantearon que no lo conocían y, en otros, que era muy básico lo que sabían de su manejo. Decidimos permitirles que resuelvan la tarea con lápiz y papel, y un grupo eligió hacerlo con Geogebra. Comparar las producciones nos permitió poner en evidencia que en el software de geometría dinámica "es posible la modificación continua de las construcciones por medio del arrastre, obteniendo con facilidad y rapidez numerosos ejemplos a partir de una sola figura" (Álvarez, 2014, p. 16), lo que no es posible en las construcciones con lápiz y papel. Además, se puso en juego una tarea típica del trabajo en Geogebra: ¿cómo garantizar que se mantengan ciertas propiedades al arrastrar ciertos elementos de una construcción? Todo esto, como afirma Álvarez (2014), hace posible explorar distintas características y propiedades de la construcción geométrica y brinda la posibilidad de formular conjeturas, verificarlas o refutarlas y estudiar la dependencia entre objetos geométricos o propiedades, proveyendo así un contexto rico para elaborar justificaciones de las conjeturas realizadas.

A continuación, llevamos adelante una clase compartida donde ambas docentes, Prof. Natalia Heredia y Prof. Sabrina Colombo, participamos en el desarrollo de la segunda actividad con las y los estudiantes. Esta actividad presenta el problema de hallar un lugar geométrico con el siguiente enunciado:

Enunciado 1

Los puntos A y B pertenecen respectivamente a las rectas perpendiculares r y s. El segmento AB mide 8 y M es su punto medio. Hallar el lugar geométrico L de los todos los posibles puntos M.

Las y los estudiantes trabajaron en grupos de dos o tres y acordamos permitir que comiencen las construcciones de análisis con lápiz y papel, dadas las dificultades planteadas previamente con el software. En esta segunda actividad, pudimos notar que la dificultad en el uso del software radicaba en las habilidades de construcción, sobre lo que González Concepción (2014, p. 168) afirma: "es lógico, puesto que la realización de construcciones geométricas siempre ha sido un contenido difícil por la necesidad de integrar en ellas muchos otros conocimientos geométricos". Ante esto, lo que decidimos fue volver a comparar las producciones en Geogebra con aquellas realizadas en papel. Al compartirlas, las y los estudiantes comentaron procesos de construcción y se reforzó lo trabajado previamente con respecto a las ventajas del uso del software.

Con las primeras construcciones, cada grupo comenzó a conjeturar: algunos escribieron que el lugar geométrico es un cuadrado, otros que es un rectángulo, y otros, que es una circunferencia (imágenes 1, 2, 3 y 4).

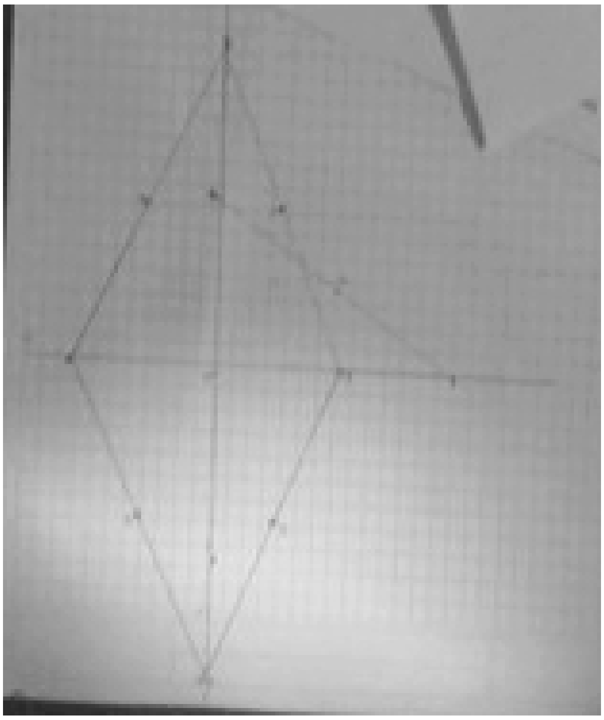


Imagen 1: *Construcción de grupo 1.*

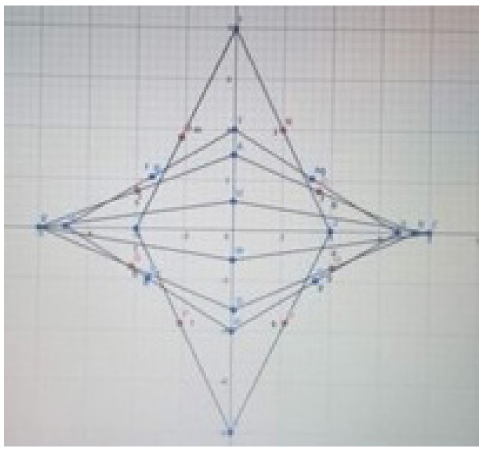


Imagen 2: *construcción del grupo 2.*

 ISSN 2422-5975, en línea

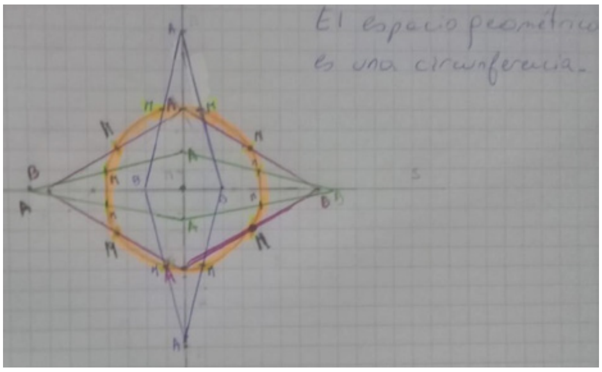


Imagen 3: *construcción del grupo 3.*

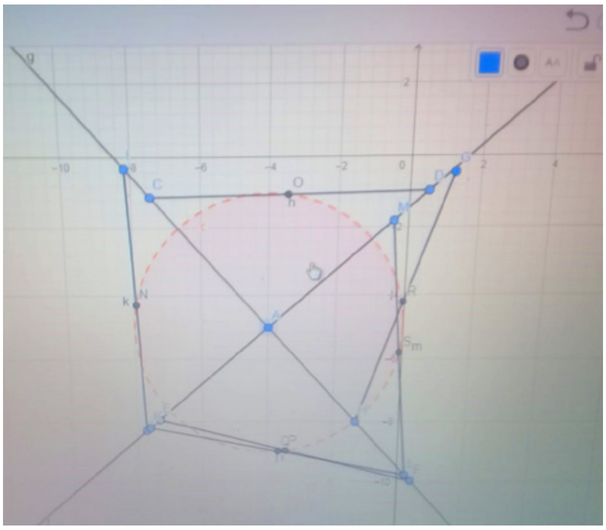


Imagen 4: *construcción del grupo 4.*

Al compartir estas conjeturas, todos concluyeron que el lugar geométrico es la circunferencia agregando segmentos en sus construcciones. A partir de ello, comenzamos el trabajo con el segundo enunciado:

Enunciado 2

Las rectas r y s son los ejes de un sistema cartesiano, y los puntos A, B y M cumplen lo pautado en el enunciado 1.

a) ¿Cómo podemos determinar, sin realizar esa construcción en Geogebra, si el lugar geométrico L de todos los posibles puntos M incluye a (3; 2,5), (2; $\sqrt{12}$ *), (-*$\sqrt{8}$*; -*$\sqrt{8}$ *)?*

b) ¿Qué tienen que cumplir las coordenadas (x ; y) de un punto para pertenecer al lugar geométrico L?

c) Si en lugar de considerar como distancia entre A y B al valor fijo 8, consideramos la distancia n, ¿qué análisis podemos realizar?

d) Si en lugar de considerar las rectas r y s como perpendiculares, consideramos que no lo son, ¿qué sucede con el lugar geométrico L?

Ante la primera lectura, uno de los estudiantes compartió con la clase: "Marcando distintos puntos sobre la circunferencia, se puede ver que el punto (3; 2,5) está incluido". A partir de ello, y observando las coordenadas de los demás puntos, planteamos la necesidad de caracterizar algebraicamente al lugar geométrico para poder determinar con precisión si el punto pertenece o no al mismo.

Luego, cada grupo comenzó a trabajar sobre su construcción y elaboraron conjeturas como:

- Una condición es que se respete el radio de la circunferencia, entre las variables se establece una relación inversamente proporcional.
  Valores máximos: (0; 4)
  Valor mínimo: (4; 0)
- Teniendo en cuenta que el valor fijo se puede modificar, marcando siempre los puntos medios obtengo la circunferencia.
- Si no son rectas perpendiculares, no se formaría una circunferencia porque el radio se modifica. Si usamos rectas oblicuas, se formaría una elíptica.
- Ecuación canónica de la circunferencia cuando pasa por el origen
  $$r^2 = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2$$
  $$(X - 0{,}06)^2 + (Y - 2{,}86)^2 = 13{,}76$$

Al compartir estas conjeturas y debatir sobre ellas, se logró caracterizar algebraicamente el lugar geométrico.

Para dar cierre, las docentes compartimos con proyector diferentes construcciones realizadas con geometría dinámica en Geogebra (imágenes 5 y 6) y les pedimos que analicen las mismas a partir del *protocolo de construcción*,[2] con la intención de que observen el proceso llevado a cabo y conozcan las propiedades puestas en juego y las herramientas utilizadas.

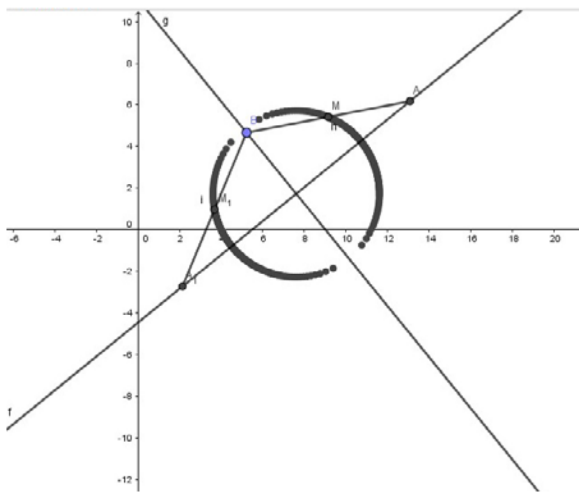


Imagen 5: *Construcción animada presentada por las docentes.*

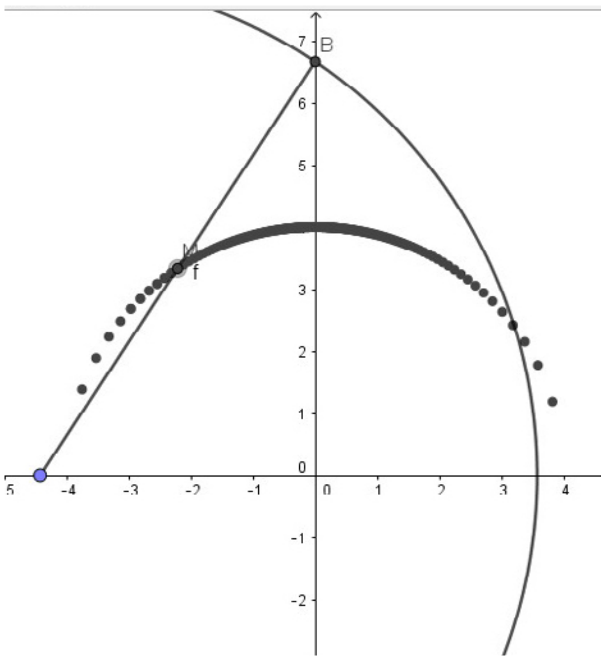


Imagen 6: *Construcción animada presentada por las docentes.*

La secuencia continuó con actividades donde se refuerza la necesidad de caracterizar y verificar algebraicamente, partiendo de construcciones para encontrar lugares geométricos y abordando todas las cónicas. Finalmente, se reconocen las cónicas como secciones del cono y se investigan sus aplicaciones.

A través del desarrollo de estas tareas, se fue observando un avance en el uso de Geogebra por parte de las y los estudiantes como herramienta de análisis (ver imágenes 7 y 8 correspondientes a la actividad 8 de la secuencia).

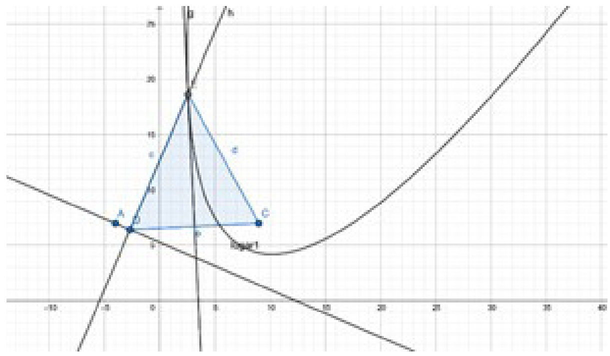


Imagen 7: *Construcción del grupo 1 correspondiente a la actividad 8.*

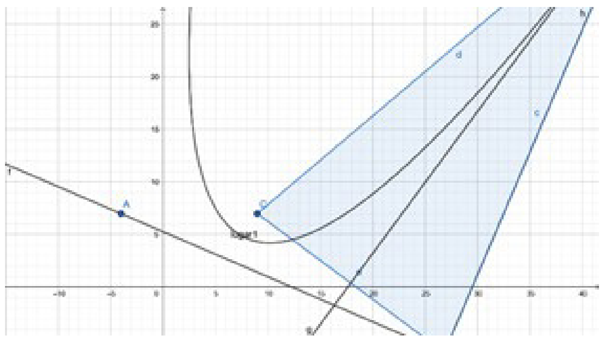


Imagen 8: *Construcción del grupo 2 correspondiente a la actividad 8.*

2 El protocolo de construcción es una tabla que muestra todas las etapas de construcción. Desde allí puede rehacerse una construcción paso a paso, usando una Barra de Navegación que aparece al pie de la pantalla.

 ISSN 2422-5975, en línea

Reflexión final

A partir de esta experiencia, podemos afirmar que la geometría analítica puede ser abordada a partir del análisis de situaciones problemáticas de la geometría sintética; en particular, es posible el estudio de las cónicas como lugar geométrico, sin recurrir a la exposición docente de sus fórmulas y características, sino a través de la construcción por parte de las y los estudiantes.

Durante el proceso, se propició el trabajo colaborativo para resolver situaciones donde surge la necesidad de algebrizar. Por lo que, desde nuestra perspectiva, el álgebra se convirtió en una herramienta para resolver cuestionamientos, aplicando así la geometría analítica en las situaciones analizadas. Se pudo apreciar la continuidad entre ambas geometrías planteada por Gascón (2002).

El software Geogebra, a pesar de las primeras dificultades, tomó relevancia, ya que fue el recurso que permitió visualizar, conjeturar y argumentar.

Referencias

Álvarez, M. (2014). *Relación entre Geometría sintética y analítica y TIC'S: análisis matemático-didáctico de una actividad* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de General Sarmiento.

Gaita Iparraguirre, Rosa C. (2014). *El paso de la Geometría sintética a la Geometría analítica* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid.

Gascón, J. (2002). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. *Disertaciones Matemáticas del Seminario de Matemáticas Fundamentales, 28,* 1-21.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma, 44,* 25-34.

González Concepción, J. (2014). Formación inicial de profesores en Geometría con GeoGebra *Revista Iberoamericana de Educación, 65*(1), 161-172.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2010). *Diseño Curricular. Profesorado de Educación Secundaria en Matemática.* Córdoba.

Fortaleciendo la enseñanza de la Matemática

Entrevista a la Dra. Patricia Kisbye

Secretaria de Promoción de la Ciencia y las Nuevas Tecnologías del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba

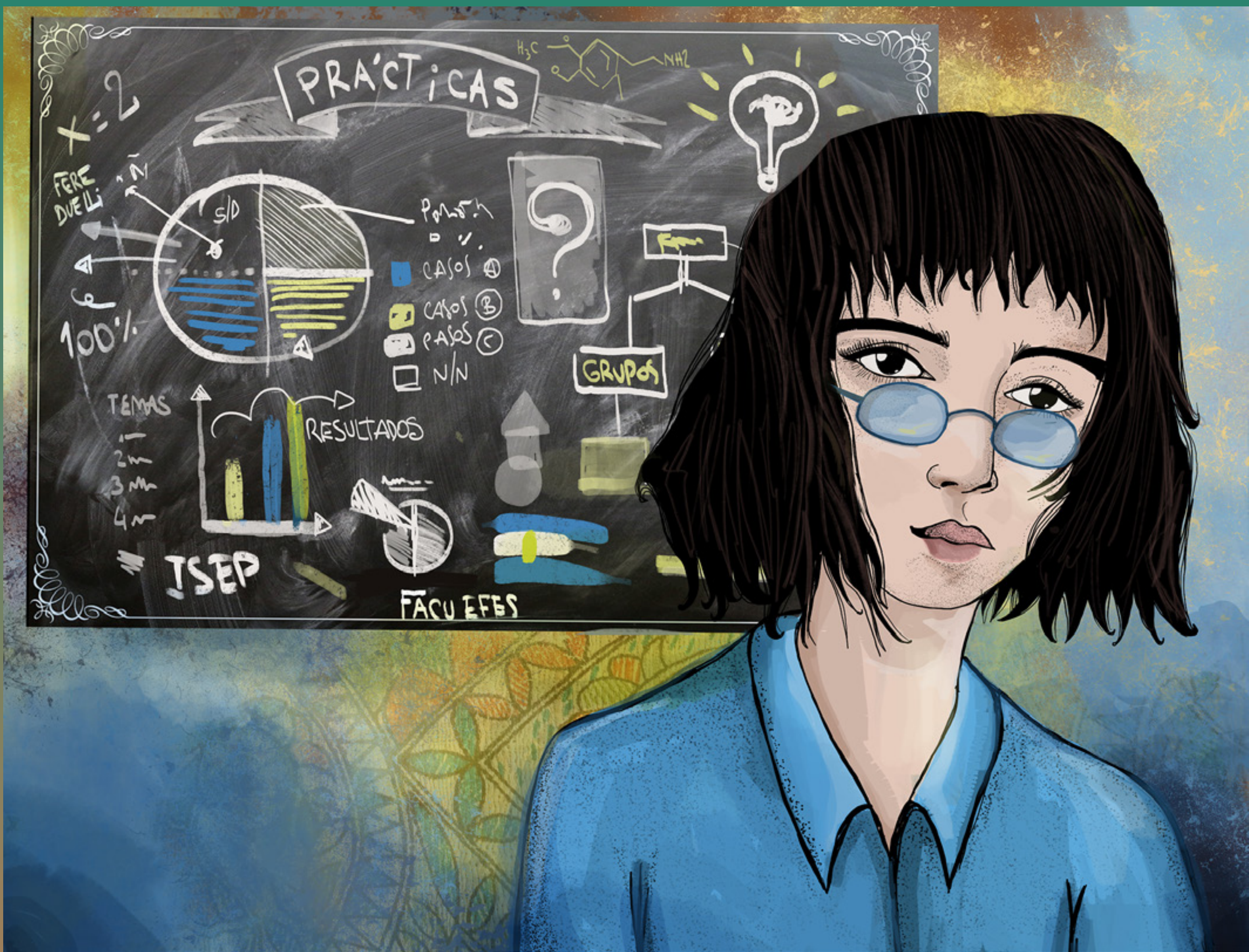


Ilustración para la difusión de capacitaciones del ISEP, Instituto Superior de Estudios Pedagógicos.
Fere Duelli, 2020. @fereduellihistorietas

Liliana Abrate

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

La preocupación sobre la enseñanza de la Matemática, que ha inspirado este número de nuestra Revista EFI, recoge diversas actividades, proyectos de investigación y experiencias pedagógicas reunidas en estas páginas. Sólo son algunas de las múltiples y valiosas acciones que nutren el área y que son priorizadas por las políticas educativas del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Resulta claramente relevante adoptar definiciones y generar intervenciones para promover propuestas que permitan mejorar la educación obligatoria.

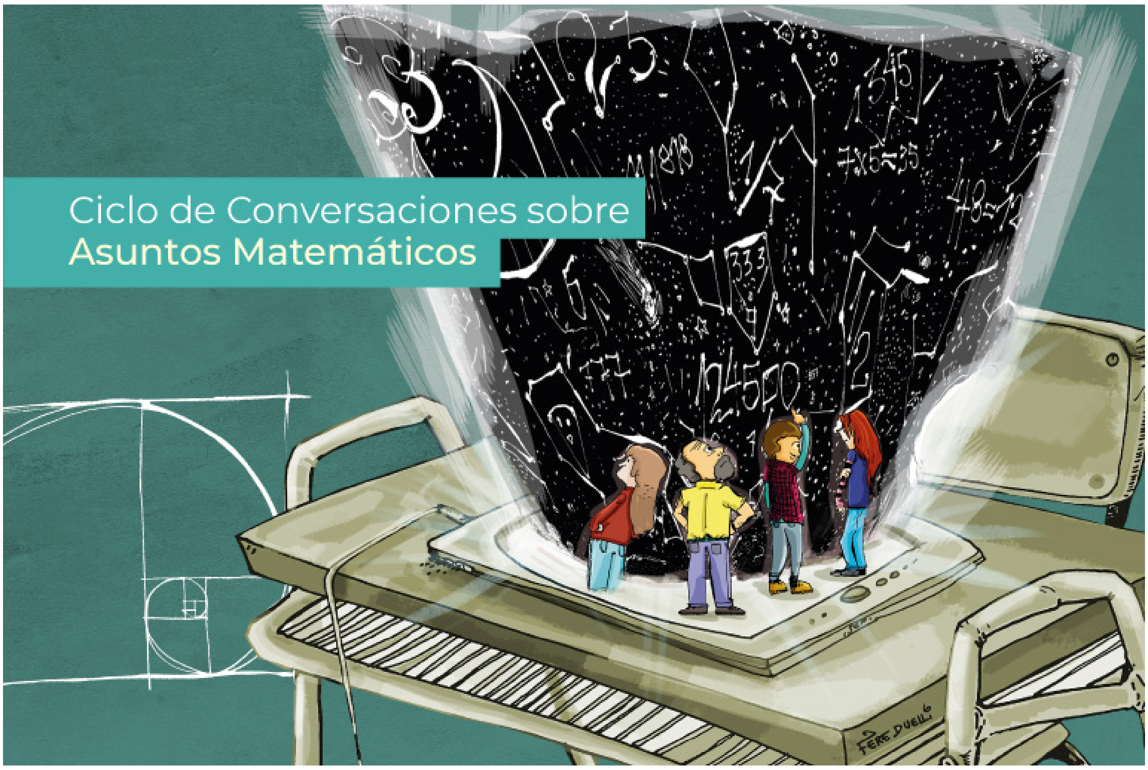
Esta convicción político-pedagógica se traduce en decisiones como la creación de la Secretaría de Promoción de la Ciencia y las Nuevas Tecnologías, a cargo de la Dra. Patricia Kisbye, con quien dialogamos en esta entrevista. Nos interesa conocer, desde su propia voz, los objetivos que se proponen y los desafíos que asumen para su gestión.

–¿Cuáles son los objetivos y desafíos principales que se propusieron con la creación de la Secretaría de Promoción de la Ciencia y las Nuevas Tecnologías?

–La Secretaría de Promoción de la Ciencia y las Nuevas Tecnologías fue creada en la actual gestión política del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, con el objetivo de realizar acciones tendientes a fortalecer la enseñanza de la Matemática y las ciencias en la escuela obligatoria e incorporar la enseñanza de las ciencias de la computación. La decisión de crear esta Secretaría se encuentra en línea con el objetivo del gobierno provincial de consolidar a Córdoba en el paradigma de la economía del conocimiento, es decir, en una economía basada en el talento de las personas, en un mundo ya interconectado, que requiere de soluciones cada vez más creativas, innovadoras, y que por los permanentes avances científico-tecnológicos requiere de un aprendizaje continuo a lo largo de toda la vida. Por ello es necesario formar a nuestros jóvenes para que estén preparados ante un mundo cada vez más cambiante.

–¿Qué líneas de acción se van desarrollando en el contexto actual?

–Se han ido desarrollando diferentes líneas de acción. Una de ellas tiene que ver con la revisión de los diseños curriculares de los niveles obligatorios, principalmente de Matemática y ciencias, atendiendo no sólo a la preocupación por los resultados de las pruebas nacionales e internacionales, sino también buscando identificar cuáles son los aprendizajes y contenidos prioritarios que deben incorporarse en la enseñanza y que interactúan con el aprendizaje de las nuevas tecnologías. En tal sentido, sabemos que las transformaciones y actualizaciones curriculares requieren de una atención a la formación inicial y continua de los docentes, quienes tendrán a su cargo la efectiva inclusión de los nuevos contenidos y metodologías en las aulas. Por tanto, procuramos contribuir a la difusión de las temáticas que resultan prioritarias en el área.



Es así que en el año 2020, en el contexto de pandemia, se realizó una experiencia de dos ciclos de conversatorios en matemática en conjunto con DGES e ISEP. Estos conversatorios estuvieron dirigidos principalmente a estudiantes de profesorado de enseñanza primaria, y tuvieron como objetivo poner en diálogo a los estudiantes con especialistas de la matemática. Se abordaron distintas temáticas como el concepto de número, las técnicas de conteo, divisibilidad y geometría, procurando no sólo profundizar en el contenido matemático sino además reflexionar sobre el alcance que estos saberes tienen dentro y fuera de la disciplina.
Otro ámbito en el que se realizaron acciones es a través de la Feria de Ciencias y Tecnología, que por varios años fue organizada por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, y a partir del año 2020, el Ministerio de Educación se ha sumado a través de esta Secretaría y la Dirección de Desarrollo Curricular, Capacitación y Acompañamiento Institucional. Este evento permite rescatar y propiciar formas de construcción colectiva del conocimiento científico y tecnológico, en las que se destaca un trabajo colaborativo apuntando a una mirada interdisciplinaria. En el contexto de la pandemia y la enseñanza remota, se ha propuesto que sea un espacio en el cual los docentes y estudiantes puedan mostrar sus experiencias de indagación escolar y se ha fortalecido la evaluación de proyectos en un sentido formativo. Un buen número de escuelas ha participado en el año 2020 y este año nos encuentra mejor preparados para acompañar a las instituciones educativas en este desafío.
También durante 2020 se realizó una experiencia vinculada con la enseñanza de las ciencias de la computación que tuvo como destinatarias a un conjunto de escuelas orientadas. Esta iniciativa se realizó en el marco de un acuerdo con la Fundación Sadosky bajo el nombre "Tu celular de la mejor manera", y

permitió que los jóvenes pudieran acercarse a la computación investigando sus celulares por dentro para entender cómo funcionan y qué decisiones tomar para evitar problemas frecuentes.

–¿Qué problemáticas sobre la enseñanza de la Matemáticas se están identificando en los niveles obligatorios y en la formación docente? ¿Qué acciones se pudieron desplegar a partir de ello y qué proyectos tienen para este año?

–Los resultados de las diferentes pruebas, tales como Aprender y PISA, dan cuenta de que existen dificultades en los estudiantes en relación con la matemática. Por un lado, se ha observado una cierta postergación en la enseñanza de los contenidos en la escuela secundaria, que reclama del nivel primario el logro de ciertos aprendizajes de parte de los estudiantes. Es así como en el primer año se busca subsanar esta supuesta falencia, y los aprendizajes del primer año se trasladan al segundo año, y así sucesivamente.
Otra problemática tiene que ver con la poca presencia de determinados contenidos matemáticos en la enseñanza, por ejemplo, los relacionados con geometría, con probabilidad y con estadística. La geometría, como bien sabemos, involucra el estudio de figuras y objetos geométricos en el plano y en el espacio, sus movimientos y simetrías, y la resolución de problemas geométricos permite desarrollar estrategias de pensamiento matemático deductivo sin apelar a operaciones y cálculos numéricos. En el caso de la probabilidad y de la estadística, son ramas de la matemática que aparecen en otras ciencias –naturales, sociales, humanas–, y en ese sentido aporta a comprender cómo estas disciplinas construyen el conocimiento.
En cuanto a acciones a desarrollar, se está trabajando en la incorporación de la enseñanza de las ciencias de la computación en la escuela obligatoria, lo cual implica no sólo la elaboración de un diseño curricular que abarque estos aprendizajes y contenidos sino también la formación de docentes y la selección y elaboración de propuestas didácticas que acompañen a una implementación de este cambio curricular en un futuro inmediato.
Se está pensando en una propuesta de formación que invita a docentes y estudiantes de formación docente a pensar la matemática en su relación con otras ciencias, la tecnología y el arte. Muchos de los avances históricos de la matemática han tenido que ver con dar respuesta a problemas de otras áreas del conocimiento, o incluso en el surgimiento y desarrollo de nuevas disciplinas, como la computación. Consideramos de gran relevancia brindar estos espacios en la formación continua de los docentes.
También se está trabajando en conjunto con la Dirección General de Educación Técnica y Formación Profesional y la Dirección de Desarrollo Curricular, Capacitación y Acompañamiento Institucional en la elaboración de materiales escritos y audiovisuales en contenidos priorizados de Matemática y Ciencias Naturales, con la participación de docentes de las escuelas y especialistas en las disciplinas. Esta acción tiene como objetivo acompañar la escuela remota, brindando recursos que puedan ser utilizados por docentes y estudiantes.

–¿Qué características o ideas centrales sostienen la enseñanza de la Matemática en relación con la programación?

La programación es sólo una parte dentro de las ciencias de la computación. Las ciencias de la computación abarcan distintos aspectos: el conocimiento de qué es una computadora, sus partes, cómo funciona, bases de datos, redes, lo referente a ciudadanía digital en cuanto a conocer nuestra identidad dentro de un ámbito informatizado, cómo protegernos, cómo compartir información; pero sin duda la programación es lo que más vincula a la ciencia de la computación con la resolución de problemas.
La programación es un método para describir la resolución de un problema de manera que pueda ser ejecutado por una computadora. Los programas son algoritmos, es decir, secuencias de pasos que, traducidos a cierto lenguaje de programación, son interpretables por la computadora. Escribir un programa requiere entonces de conocer en profundidad el problema y también una cierta lógica de resolución: identificar cuáles son los datos, los pasos a seguir, las partes del problema y cómo se combinan para llegar a la solución, y de qué manera se quiere presentar la solución.
Cuando hablamos de resolver un problema, no nos estamos refiriendo necesariamente a un problema matemático. Puede ser un problema de cálculo científico, el desarrollo de una *app* de celular, el diseño de una página web, la creación de un sistema de comercio electrónico y otros problemas que se resuelven con el uso de una computadora.
Es así que la programación requiere de una forma de pensamiento, una forma de imaginar y plantear la resolución de un problema que es diferente al modo de pensamiento de otras disciplinas. No obstante, si bien las ciencias de la computación tienen una fuerte relación con otras disciplinas, podemos decir que la matemática tiene el mayor vínculo con ella. La matemática permite comprender la simbolización, la lógica, los cálculos computacionales, la representación binaria, los fundamentos de la ciencia de datos, el aprendizaje automático, la criptografía, entre otras.

–Muchas Gracias, Dra. Patricia Kisbye, por esta entrevista.

Queda muy clara la importancia de afrontar uno más de los múltiples y complejos desafíos que nos presenta el tiempo actual para procurar una formación de calidad para las nuevas generaciones. Y más aún, ante la aceleración de los cambios socio-culturales y tecnológicos que nos presente este siglo XXI. Claramente, para ello se requiere de equipos docentes con una formación de gran calidad y en permanente actualización. Para lo cual, la investigación, el relato y el análisis de distintas experiencias de enseñanza resultan un aporte significativo. En este número de la Revista EFI, esperamos ofrecer un aporte para contribuir a tales propósitos.

Síntesis de las acciones que se enmarcan en las definiciones políticas-pedagógicas del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, vinculadas a la formación docente continua y que se ofrecen a través del Instituto Superior de Estudios Pedagógicos

Especialización Docente de Nivel Superior en la Enseñanza de Matemática en la Educación Primaria

La **Especialización Docente de Nivel Superior en la Enseñanza de Matemática en la Educación Primaria**, iniciada en el año 2019, está orientada a los docentes en actividad en escuelas de gestión estatal del nivel de Educación Primaria de la provincia de Córdoba. Es una propuesta que se inscribe dentro de una oferta de formación continua que responde a las demandas y problemáticas propias del Segundo Ciclo del nivel de Educación Primaria de la provincia de Córdoba, al mismo tiempo que a la especificidad de sus diversos espacios curriculares: Matemática, Lengua y Literatura, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales.

Entre sus objetivos, se destacan:

- ✔ Brindar un espacio de formación a docentes del nivel de Educación Primaria que favorezca su actualización y especialización disciplinar y didáctica en diálogo reflexivo con sus prácticas de enseñanza.

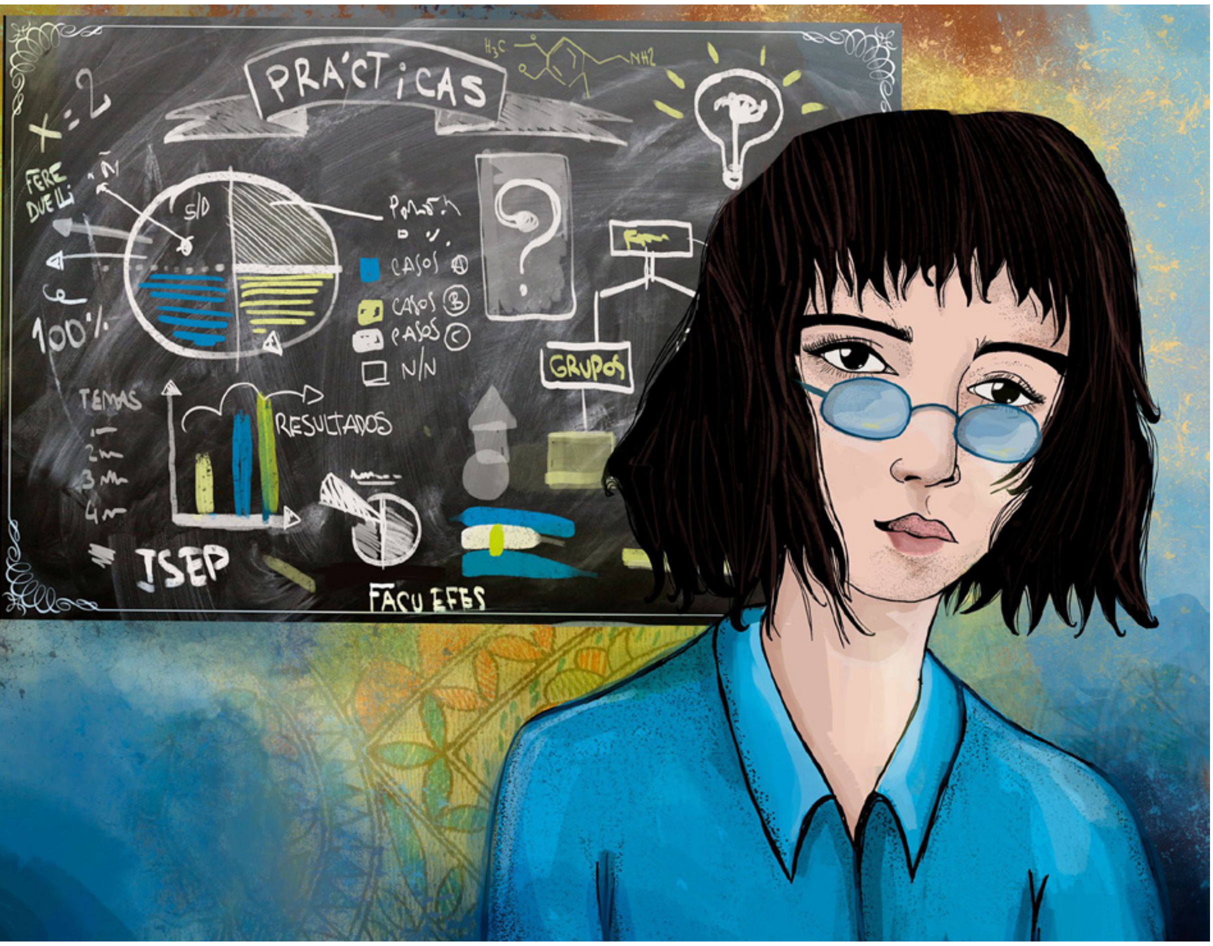
- Propiciar espacios de profundización de los marcos teóricos que sustentan las prácticas cotidianas en diálogo con planteos curriculares actualizados.
- Generar procesos de reflexión e intercambio, a través de instancias virtuales y presenciales, para colaborar en la producción de propuestas de intervención docente acordes con los marcos teóricos y curriculares trabajados.
- Desarrollar herramientas conceptuales, metodológicas y prácticas para diseñar, gestionar y evaluar propuestas de enseñanza de matemática poniendo en juego una variedad de estrategias didácticas.
- Articular los conocimientos matemáticos de los docentes con su trabajo cotidiano en el aula, en pos de analizar críticamente sus propuestas.

Estas ofertas de postítulos intentan discutir las concepciones de sentido común acerca de lo didáctico, acercando a los docentes a una idea de la producción de conocimiento didáctico como resultado del estudio sistemático y sostenido acerca de los problemas de la enseñanza, donde la práctica se constituye en un objeto de análisis central.

La Especialización en Enseñanza de la Matemática constituye un dispositivo de formación que comparte la preocupación por dos ejes de problemas: uno vinculado al lugar del lenguaje en la construcción y comunicación de conocimientos, y otro centrado en la inclusión crítica en la escuela de los nuevos medios en la producción y circulación de conocimiento.

Los contenidos específicamente matemáticos abordan los ejes y conceptos presentes en el área durante toda la escolarización primaria, considerando su complejización creciente con la intencionalidad de trascender la fragmentación que suele producirse entre el primero y el segundo ciclo. En todos los casos, se realiza un desarrollo que proporciona a los docentes cursantes un acercamiento a las definiciones y propiedades de los conceptos matemáticos abordados, y se consideran los aspectos didácticos relacionados con el diseño, el desarrollo y la evaluación de propuestas para su enseñanza en el Segundo Ciclo del nivel.

La propuesta retoma, en los contenidos específicamente matemáticos, la consideración de situaciones de enseñanza que involucran la lectura y la escritura en el área como herramientas indispensables para la producción de conocimiento matemático y para la incorporación de recursos TIC, tanto en la propia experiencia formativa como en el análisis de su valor didáctico para su inclusión en situaciones de enseñanza.



Formación Docente Complementaria

Profesorado de Matemática en Educación Secundaria y Profesorado de Matemática en Educación Superior

En el marco de la **Formación Docente Complementaria**, el ISEP cuenta con dos propuestas formativas: en primer lugar, el **Profesorado de Matemática en Educación Secundaria** en concurrencia con título de base para profesionales no docentes que enseñan en la Educación Secundaria y que, si bien poseen título profesional, no cuentan con la formación pedagógico-didáctica correspondiente para enseñar en este nivel. En segundo lugar, el **Profesorado de Matemática en Educación Superior**, que se orienta a aquellos profesores de Educación Secundaria que ocupan cargos docentes y/o aspiran a cubrir cargos en carreras de formación docente en el Nivel Superior.

El **Profesorado de Matemática de Educación Secundaria (en concurrencia con el título de base)** busca aportar a la profesionalidad docente propiciando la construcción de un sistema de saberes de diverso orden, que nutra el análisis de la realidad educativa y escolar, además de aportar a la construcción de propuestas de intervención docente en el campo de la matemática. Este proceso requiere la movilización de las formas de pensar, de sentir y de actuar que se han formado en la propia experiencia como estudiante y como docente, por lo que se abordará un análisis de la tarea cotidiana del docente, inserto en un contexto global, local e institucional, reconociendo sus complejidades, las herencias de una configuración histórica y la relación con los desafíos que plantean las políticas educativas actuales.

Entre otros, la propuesta define los siguientes objetivos:

- Construir un marco conceptual para reflexionar sobre los procesos educativos en sus dimensiones ética, política, social, económica; las variables y los procesos que inciden en la dinámica del conocimiento, del aprendizaje y de la enseñanza.
- Propiciar el análisis de la dimensión institucional del oficio, considerando lo relativo al sistema educativo en su conjunto, su normatividad y las características particulares del nivel de desempeño, para habilitar una mejor predisposición al trabajo en equipo.
- Analizar, en el marco de los diseños curriculares de Matemática en la Educación Secundaria, los contenidos y aprendizajes esperables, atendiendo a las tareas de diseño y planificación de situaciones de enseñanza y de aprendizaje.
- Construir un enfoque didáctico abierto y flexible respecto de los procesos de diseño y desarrollo de las prácticas de enseñanza en Matemática.
- Generar espacios de integración entre saberes disciplinares y pedagógico-didácticos en vistas a la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la Educación Secundaria.
- Favorecer procesos de reflexión acerca de la práctica docente y de la práctica de enseñanza de la Matemática en los múltiples contextos en los cuales estas se desarrollan.

En cuanto al **Profesorado de Educación Superior en Matemática**, su finalidad general es aportar a la profesionalidad docente propiciando la construcción de un sistema de saberes de diverso orden, necesarios para la tarea de preparar a futuros formadores. El ejercicio de la profesión docente en la Educación Superior exige una mirada compleja de los contextos, los sujetos y la heterogeneidad de procesos y capacidades involucradas en el trabajo pedagógico que se despliega en los diferentes escenarios de la formación.

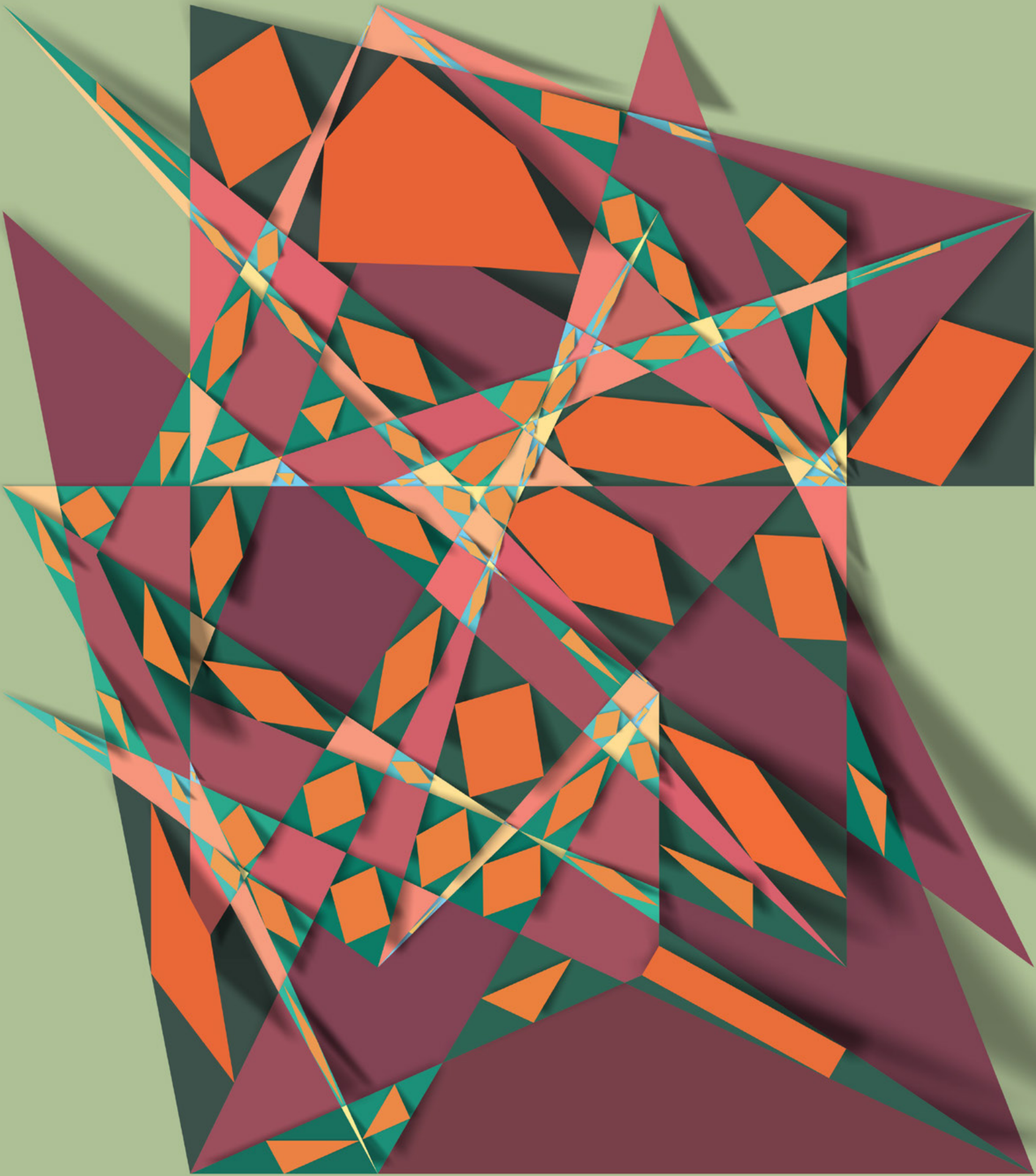
Importa destacar el propósito general de propiciar la mejora continua de la enseñanza en este nivel, atendiendo particularmente a las problemáticas de la formación docente en la sociedad contemporánea.

Entre otros objetivos, esta formación se propone:

- Construir un marco conceptual sobre la Educación Superior, su normativa, contextos institucionales y las particularidades de la formación docente, sistematizando un conocimiento amplio, integrado e integrador de diferentes perspectivas teóricas y enfoques de análisis.
- Promover capacidades y disposiciones para el trabajo docente a desarrollar y generar condiciones diversas para que los estudiantes de formación docente transiten experiencias enriquecedoras en su proceso formativo.
- Actualizar el saber pedagógico, didáctico y disciplinar, en función de las últimas producciones generadas en torno a la formación docente y las alternativas innovadoras implementadas en las últimas décadas.
- Analizar, en el marco de los diseños curriculares de la formación docente en Matemática, los contenidos presentes en los diferentes campos, atendiendo las tareas de diseño y planificación de situaciones de enseñanza y aprendizaje.
- Profundizar el análisis de la práctica docente, en tanto objeto de formación, reflexión e intervención, propiciando el desarrollo de disposiciones reflexivas respecto a la enseñanza en general y a la disciplina específica, en particular.

Publicación Digital

Córdoba, Argentina
Julio 2020



DGES · Dirección General de Educación Superior