ProFoDI·MC

Programa de Formación Docente
Inicial en Modalidad Combinada

Profesorado de Educación Primaria

CAMPO DE LA FORMACIÓN ESPECÍFICA

ITINERARIO PEDAGÓGICO DIDÁCTICO

MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA I

Dirección General de EDUCACIÓN SUPERIOR
Ministerio de EDUCACIÓN
GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA
entre todos
Hacemos

ProFoDI·MC

Programa de Formación Docente
Inicial en Modalidad Combinada

ITINERARIOS PEDAGÓGICO DIDÁCTICOS

Directora editorial
Prof. Mgter. Liliana Abrate

Coordinación pedagógica y supervisión editorial
Mariana de la Vega Viale
Claudia Castro
Sofía López
Luciana Caverzacio

Producción de contenido
Fernanda Viola

Corrección de Estilo
Sandra Curetti
Victoria Picatto

Diseño
Luis F. Gómez y Romina Sampó
EQUIPO DE DISEÑO PROFODI·MC

ITINERARIOS PEDAGÓGICO DIDÁCTICOS

PRÓLOGO

La experiencia vivida durante la pandemia por Covid-19 en los años 2020 y 2021 modificó, de manera inédita, las coordenadas para transitar y comprender lo propio de la educación. Dentro del sistema educativo, a fin de sostener los procesos pedagógicos, fue necesario introducir cambios drásticos e imprevistos. Estas modificaciones implicaron un fuerte impacto en los modos de desarrollar la tarea escolar, en general, y las prácticas de enseñanza y aprendizaje, en particular. Para responder a las necesidades planteadas por el contexto, los/las docentes de todos los niveles debieron adaptar y transformar sus programas y planificaciones, sus estrategias didácticas y modalidades de evaluación, así como los modos de vincularse y sus propios entornos de trabajo. Ineludiblemente, además, se vieron en la necesidad de incluir diversas herramientas para trabajar en la virtualidad como entorno. Asimismo, estudiantes y familias se encontraron ante un nuevo e inesperado desafío: aceptar la irrupción de la escuela en sus hogares, disponiendo de espacios, tiempos y recursos que antes eran ofrecidos en el ámbito escolar.

En una sociedad donde los avances tecnológicos no cesan de producirse, en tiempos cada vez más acelerados, toda esa experiencia acumulada por docentes, estudiantes y demás actores institucionales conforma un saber de gran valor. En este sentido, el nuevo e intempestivo encuentro con las tecnologías digitales supone la reflexión sobre su inscripción en el ámbito educativo y su potencialidad formativa, e implica la necesidad de construir una mirada crítica sobre el acceso a la cultura digital en perspectiva de derecho.

Otro aprendizaje crucial que dejó el contexto de pandemia es la redefinición de los tiempos y espacios de lo escolar, así como de los modos de hacer vínculo *en* y *con* la institución educativa. Si bien con resultados heterogéneos, quedó demostrado que es posible repensar la configuración horaria, los espacios y modalidades de encuentro para el trabajo pedagógico, las estrategias de acompañamiento de las trayectorias formativas, los modos de comunicación y participación institucional, entre otros aspectos relevantes que tradicionalmente se asociaron a la educación presencial. Sin afán de sustituir lo que pasa en la copresencia física a la que estaba habituada la comunidad educativa, se ensayaron diversos dispositivos para habitar las instituciones, que pueden considerarse como nuevos y valiosos modos de *hacer escuela*, sin necesidad que todo suceda en el edificio escolar.

A partir de estos saberes acumulados y poniendo en valor las experiencias realizadas en las instituciones de formación docente de la provincia de Córdoba, en 2021 la Dirección General de Educación Superior (DGES) crea el Programa de Formación Docente Inicial en Modalidad Combinada (ProFoDI-MC). Este se inicia como una experiencia piloto destinada a cuatro instituciones, con la finalidad de brindar un acompañamiento durante el pasaje hacia esta nueva modalidad de trabajo –en los aspectos pedagógicos, tecnológicos y organizativos–. En el año 2022, en el marco de la normativa jurisdiccional, se establece la implementación de esta modalidad en todos los institutos superiores dependientes de la DGES para profundizar los procesos de democratización en el acceso, permanencia y egreso a las carreras de formación docente, considerando las necesidades que presentan los diversos territorios de nuestra provincia.

Estas definiciones de la política educativa para la formación docente inicial buscan desplegar y potenciar experiencias formativas que combinen, de manera creativa y situada, lo valioso del trabajo en la presencialidad y las posibilidades que ofrecen los entornos virtuales. En este sentido, la modalidad combinada plantea nuevos desafíos teóricos y metodológicos en relación con los objetos de saber, los formatos curriculares y las estrategias de enseñanza y evaluación, abriendo la discusión sobre las formas de *hacer presencia* en los diversos entornos que se transitan durante el desarrollo de una propuesta formativa.

Si bien el lugar del/de la docente se ha visto conmovido ante el desafío de lo virtual –no sólo por las condiciones materiales y tecnológicas, sino también por la transformación estructural de sus formas de trabajo–, este/esta sigue siendo protagonista en las definiciones y diseños de situaciones de enseñanza, confirmando la centralidad de su tarea. Es por ello que la coordinación del ProFoDI-MC, junto a las áreas del equipo técnico de la DGES y especialistas provenientes de las diversas disciplinas, emprenden la elaboración de itinerarios pedagógico-didácticos enmarcados en el contexto actual de modalidad combinada. La intención del programa es ofrecer a docentes de carreras de formación docente inicial algunos caminos, orientaciones y recorridos posibles para la construcción de propuestas de enseñanza inscriptas en el diseño curricular vigente.

¿Qué entendemos por *itinerario pedagógico-didáctico*?

Recurrimos a la metáfora de *itinerario* para ilustrar el sentido que quisiéramos asuman estos recorridos, que se ofrecen a los/las docentes como textos abiertos y flexibles para ser utilizados en la creación de propuestas de enseñanza en esta modalidad. Se trata de producciones que *se hacen lugar* entre el currículum y la enseñanza, y pueden orientar la elaboración de propuestas didácticas, colaborando en la re-territorialización del espacio-tiempo particular propio de la presencialidad y la virtualidad. Estas producciones ponen a disposición caminos posibles que articulan enfoques teóricos y perspectivas didácticas, ofreciendo mojones de sentido a través de preguntas orientadoras, nudos problemáticos, sugerencias para la construcción de actividades, selección de materiales de lectura y diversos recursos en diferentes lenguajes (académico, artístico, digital, etc.). Constituyen trazados que pueden ser reescritos por cada docente –y en conjunto con sus colegas– en función de posicionamientos y decisiones propias, recuperando experiencias y saberes. Pueden resultar una oportunidad para revisitar, desde lo disciplinar y lo didáctico, enfoques, conceptos y propuestas metodológicas sugeridas en los diseños curriculares, incorporando saberes y experiencias que el contexto actual requiere para el Nivel Superior y los niveles para los cuales se forma.

Los itinerarios pedagógico-didácticos persiguen, principalmente, la finalidad de mantener abierto el canal de diálogo con docentes de la formación docente inicial y apuntan a la construcción colaborativa de propuestas de enseñanza en la modalidad combinada, teniendo en cuenta que estas, fundamentalmente, se definen en las aulas y se recrean en las instituciones junto a estudiantes y colegas. Estos recorridos, entonces, convocan a una escritura colectiva que puede dialogar, discutir y reconstruir saberes desde la experiencia historizada y los desafíos del futuro.

Dirección General de Educación Superior

Equipo técnico-pedagógico de la DGES

Programa de Formación Docente en Modalidad Combinada

ITINERARIO PEDAGÓGICO DIDÁCTICO

MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA

Formato: **Asignatura**
Año: **2°**
Carga horaria: **4 h cátedra**
Campo de la formación: **Campo de la Formación Específica**
Régimen de cursado: **Anual**

Marco orientador

El recorrido pedagógico-didáctico que presentamos a continuación tiene como intención ofrecer caminos, secuencias y tránsitos posibles para la construcción de propuestas de enseñanza en esta unidad curricular. Asimismo, ofrece preguntas y debates interesantes de realizar en tanto docentes formadores de docentes, con el objetivo de revisar nuestras prácticas haciendo foco en el estudio de la *proporcionalidad* en el Nivel Superior.

El itinerario se presenta, entonces, como un texto abierto y flexible que intenta abrir diálogos entre la propuesta del *Diseño Curricular para los Profesorados de Educación Inicial y Primaria* (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba [ME], 2015), la modalidad combinada y aquellas experiencias que se vienen desarrollando. Ponemos a disposición un trazado posible, que articula enfoques teóricos y perspectivas didácticas, y ofrece mojones de sentido a través de actividades, materiales de lectura y diversos recursos en diferentes lenguajes. Este trazado podrá ser reescrito por cada docente en función de sus propios posicionamientos y decisiones, recuperando sus experiencias y saberes; en ese sentido, consideramos que puede favorecer la co-construcción de experiencias de enseñanza en la modalidad combinada, en el marco de un trabajo colaborativo.

A partir de lo planteado en el *Diseño Curricular* (ME, 2015) vigente para la formación de docentes de educación primaria, particularmente en Matemática y su Didáctica I, y considerando la articulación con otras unidades curriculares del segundo año, los propósitos formativos generales de este itinerario son los siguientes:

- Analizar críticamente la manera de hacer y aprender Matemática en la educación primaria favoreciendo la construcción del sentido del conocimiento matemático y revisando, a su vez, los propios saberes construidos en torno a los objetos matemáticos puestos en juego (en particular, en relación a la *proporcionalidad directa*).
- Tomar como referencia y analizar el *Diseño Curricular de la Educación Primaria* (ME, 2011-2020) de Matemática con el fin de diseñar actividades en torno al estudio de *magnitudes proporcionales*, que promuevan la diversidad de posibilidades para acceder al conocimiento matemático de niños y niñas.
- Apropiarse de las herramientas teórico-metodológicas que ofrecen las investigaciones sobre educación matemática para generar estrategias y proyectos de enseñanza adecuados a la pluralidad de contextos propios de la educación primaria.

Propuesta metodológica

En el *Diseño Curricular* (ME, 2015) se propone trabajar a partir de los siguientes ejes de contenidos:

- Enseñanza del número natural y del sistema de numeración.
- Enseñanza de las operaciones entre números naturales.
- Enseñanza de fracciones, expresiones decimales y sus operaciones.
- Enseñanza de magnitudes proporcionales.

Asimismo, se estipula que los contenidos sugeridos para cada eje deben ser abordados desde una doble mirada: como objetos de estudio, pero también como objetos de enseñanza y, en este último caso, teniendo en cuenta los aportes de la didáctica para el nivel de destino. Este doble juego provoca que sólo se trabaje, durante gran parte del año lectivo, con los primeros ejes, lo que implica que el estudio de las *magnitudes proporcionales* quede fuera de la planificación anual del espacio curricular. Por ello, nos interesa centrarnos en analizar algunas posibles actividades a desarrollar en el eje *Enseñanza de magnitudes proporcionales*, tales como debatir sobre su pertinencia, incorporar temáticas en torno a la programación, analizar el lugar de la proporcionalidad en la escuela primaria, entre otras cuestiones.

Respecto del orden metodológico, el trabajo que se propone para el aula pone énfasis en el desarrollo de actividades de análisis y debates a partir de las producciones de los/las estudiantes. En ese sentido, consideramos relevante que la realización de las actividades vaya fluctuando entre aquellas que son de resolución individual (con el objetivo de permitir un trabajo de metacognición) y actividades grupales (donde se pone en juego la capacidad de trabajar de manera colaborativa, pudiendo argumentar su producción). En la modalidad combinada, además, las actividades podrán llevarse a cabo en instancias presenciales o virtuales sincrónicas y otras deberán tener un carácter virtual asincrónico.

Ahora bien, nos surge aquí una inquietud, que apunta a reflexionar acerca de la toma de decisiones en torno a *qué* y *cómo* trabajar en la modalidad combinada. La especialista en Didáctica de la Matemática Mabel Rodríguez plantea algunas *Consideraciones para la enseñanza de la Matemática en la virtualidad* (2020) que invitamos a analizar.

Un recorrido posible en torno al eje *Enseñanza de magnitudes proporcionales*

¿Por qué enseñar proporcionalidad?

Para comenzar, les proponemos considerar el siguiente problema:

En una perfumería se venden botellas de un perfume A. Las botellas tienen una altura de 8 cm y contienen 10 cl de perfume. En la vidriera del negocio se publicita una botella de la misma forma, pero agrandada y conteniendo el mismo perfume. Esta botella tiene una altura de 24 cm, ¿cuánto perfume tendrá esta botella mayor?

Este problema puede ser presentado a sus estudiantes. Pero antes, vamos a resolverlo y debatir en relación a respuestas comunes que ellos/ellas suelen dar. Sería interesante que se tomaran un tiempo para hacerlo, para luego seguir con el debate. ¿Lo hicieron?, ¿a qué respuesta arribaron?, ¿les presentó alguna dificultad?

Este problema fue propuesto a 18 estudiantes universitarios en el marco de un estudio llevado adelante por un equipo de investigadores de la Universidad Nacional de Córdoba. Gran parte de los/las estudiantes entrevistados/entrevistadas, que al momento del estudio cursaban la materia Álgebra Lineal, resolvieron el problema aplicando la regla de tres simple:

8 cm ________________ 10 cl
24 cm ________________ $x = \frac{24\text{ cm} \cdot 10\text{ cl}}{8\text{ cm}} = 30\text{ cl}$

Otros/otras llegaron a ese mismo resultado a partir del planteo de una proporcionalidad directa, del tipo:

$$\frac{10\ cl}{8\ cm} = \frac{x\ cl}{24\ cm}$$

Es decir, estos/estas estudiantes resolvieron el problema apelando a la linealidad. Para quien desee indagar más exhaustivamente el tema, compartimos el siguiente artículo: "Sobregeneralización de Modelos Lineales: estrategias de resolución en contextos universitarios", de Villarreal et al. (2007).

La primera pregunta que podemos formularnos es: ¿30 cl es efectivamente la solución al problema? Y si no es ese el resultado correcto, ¿qué podemos observar en estas respuestas dadas por estudiantes de Nivel Superior?

Con relación a la muy conocida *regla de tres*, Panizza y Sadovsky (1991) plantean que:

> El status con que se presenta el método ubica al alumno en la situación de estar aprendiendo un concepto nuevo (el de proporcionalidad), cuando en realidad está aprendiendo un método (que es válido cuando hay proporcionalidad). Todo eso crea una confusión entre el concepto y el método, y tiene como una de sus consecuencias el aprendizaje de un mecanismo ciego, independiente de los problemas que permite resolver. (p. 13)

Los/las estudiantes entrevistados/entrevistadas conocían y sabían operar con el mecanismo de la regla de tres, sin embargo la aplicación automática de esta regla es lo que los llevó al error. Es por ello que, tal como lo sugiere Crippa et al. (2005):

> Debemos alentar a que las prácticas de resolución de problemas de proporcionalidad estén provistas de significado, que los alumnos conozcan múltiples maneras de abordarlas de forma tal que una sirva de control a otra. La regla de tres simple es sólo una más de las posibilidades. En ella se sintetizan múltiples conocimientos sobre proporcionalidad de manera hermética y ordenada. La regla de tres simple es un algoritmo al que se llegará en virtud de síntesis; es un punto de llegada, no de partida. (p. 28)

¿Qué otra información nos brindan los resultados de las investigaciones? El fenómeno estudiado fue denominado por Villarreal et al. (2007) como:

> Extensión de modelos lineales a contextos no lineales o sobregeneralización de modelos lineales. Tal fenómeno da cuenta de la resolución de ciertas cuestiones matemáticas que vinculan dos variables, empleando modelos lineales, aunque la situación planteada, desde la perspec-

tiva del docente o investigador, sea no lineal. Al hablar de modelo lineal nos referimos a representaciones particulares de proporcionalidad directa, al esquema de la regla de tres simple o a la relación funcional y = a.x+b. (p. 3)

Lo que mencionan estos autores es que este fenómeno se presenta con cierta regularidad; incluso en un curso de capacitación organizado con docentes de Nivel Universitario aparecieron respuestas similares. Esto nos lleva a preguntarnos acerca de la necesidad de debatir en torno a la proporcionalidad y, cuando hablamos de debatir, nos referimos no sólo a trabajar sobre nociones de proporcionalidad, sino también a poner en juego la capacidad de discernir cuáles son las situaciones donde los modelos lineales no son pertinentes. Es decir, plantearnos un cuestionamiento sobre la validez del modelo empleado.

Como docentes formadores de docentes los/las invitamos ahora a intentar dar respuesta a los siguientes interrogantes: ¿por qué enseñar proporcionalidad a futuros/futuras profesores/profesoras de educación primaria?, ¿qué significa que un/una estudiante del profesorado *sepa sobre proporcionalidad*?, ¿cómo se enseña? o lo que es más difícil de responder: ¿cómo se enseña a enseñar proporcionalidad?

Las respuestas a estas preguntas pueden ser varias, incluso parciales, pero lo que sí es importante tener en cuenta es que el estudio de la proporcionalidad no se limita a saber aplicar un método, una regla. Para una discusión más amplia, les sugerimos leer el fragmento "¿Por qué enseñar proporcionalidad?", correspondiente al documento *La Proporcionalidad*, elaborado por Crippa et al. (2005) en el marco del proyecto Fortalecimiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Primaria Básica de la Subsecretaría de Educación de la provincia de Buenos Aires.

Esta primera actividad nos llevó a reflexionar sobre la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela y también en la formación docente. Les sugerimos proponer la lectura y análisis del problema del perfume a sus estudiantes, discutir en base a sus producciones e incluso dar lugar al debate y la reflexión sobre la importancia de la enseñanza de la proporcionalidad en la educación primaria.

Proporcionalidad como objeto de estudio

Acto seguido, tomamos como punto de partida la necesidad del estudio de la proporcionalidad y su enseñanza, y les ofrecemos la siguiente actividad.

A continuación se presentan varios problemas. Resuelve cada uno y analiza qué conocimientos se ponen en juego. Responde: ¿qué diferencias se evidencian entre ellos?

1) En un mapa de la Isla Paraíso, 2,5 cm representan 5 km en la realidad. Mirando dicho mapa, vemos que de Puerto Esmeralda a Ciudad Encantada hay 35 cm, entonces: ¿cuál es, en km, la distancia que existe entre Puerto Esmeralda y Ciudad Encantada?

2) En una clase de matemáticas donde hay 13 niños y 16 niñas, un/una docente escribe cada uno de sus nombres en un trozo de papel. Luego los coloca en un sombrero y saca uno sin mirar. ¿Cuál de las siguientes posibilidades es más probable que ocurra? Justifica tu elección:

A. Que el papel contenga el nombre de un niño.

B. Que el papel contenga el nombre de una niña.

C. Es igual de probable que el papel contenga el nombre de un niño o una niña.

3) Un mayorista de artículos de librería recibe paquetes que contienen cajas de marcadores, todos ellos traen la misma cantidad de cajas. Completen la siguiente tabla teniendo en cuenta estos datos y expliquen qué pensaron para completar cada casilla.

Cantidad de paquetes	3	7	10	13	23
Cantidad de cajas de marcadores	54				

4) Un equipo de hándbol hizo 48 goles en 2 partidos. Entonces, ¿cuántos goles hará en 4 partidos?

5) Lorena fue a comprar 3/4 kg de helado. En la heladería estaba expuesto un cartel con los precios:

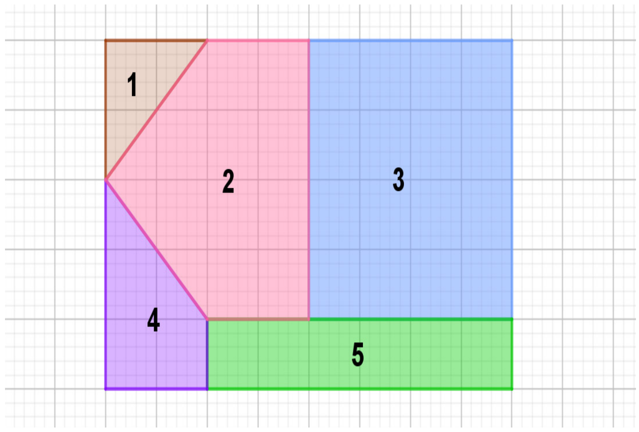
Lista de precios	
1 kg	$800
½ kg	$440
¼ kg	$240

Lorena le pagó $600 al heladero. Sin embargo, este le dijo que debía pagar $680. ¿Por qué se habrá producido esta confusión? ¿Por qué Lorena habrá pensado que debía pagar $600? ¿Cómo le habrá explicado el heladero de dónde obtuvo ese valor?

6) Una panadería ofrece la siguiente promoción: la docena de medialunas a $700 o cajas de 5 medialunas a $300. ¿En cuál de las dos presentaciones el precio es más conveniente?

7) La mezcla A está compuesta por 9 gr de azúcar en 4 litros de agua, mientras que la mezcla B tiene 11 gr de azúcar en 5 litros de agua. ¿Cuál de las mezclas es más dulce?

8) El siguiente es un rompecabezas que queremos agrandar. ¿Qué medidas deberá tener cada pieza para que el largo del rompecabezas –que es de 8 cm– pase a medir 20 cm?



9) La escuela del barrio de Juan tiene 200 alumnos, de los cuales el 75% almuerza en el comedor escolar. Entonces, Juan dice que hay 50 que no almuerzan allí. ¿Es correcto su cálculo?

10) ¿Qué podemos observar al llenar un envase cilíndrico? Ingresa al sitio de *GeoGebra*, realiza la simulación y analiza el llenado.

11) Tomemos la fracción $\frac{2}{3}$. Si se duplican los valores del numerador y del denominador, el nuevo número es:

A. La mitad de grande que $\frac{2}{3}$

B. Igual a $\frac{2}{3}$

C. El doble de grande que $\frac{2}{3}$

12) Martín trajo de sus vacaciones en Buenos Aires una estatuilla en miniatura del Obelisco. Se la muestra a sus amigos.

–¡Es tan pequeño! ¡Mide apenas 14 cm! –exclama Pablo.

–¡El real no es tan pequeño, es 500 veces más grande! –responde María.

–En realidad, el Obelisco tiene unos 70 metros de altura –corrige Martín.

¿Tiene razón María? ¿Conoces otras situaciones en las que se reproducen en miniatura objetos o lugares cotidianos?

Es posible advertir que los problemas presentados pueden ser clasificados en varias categorías, dependiendo de algunas variables didácticas puestas en juego. Por ejemplo:

Problemas de encontrar un cuarto dato proporcional.	Estos son los problemas más clásicos, donde se conocen tres datos y estamos buscando el cuarto. Pueden relacionarse con magnitudes de la misma o de diferente naturaleza. Ejemplos: problemas 1 y 3.
Problemas de reconocimiento de proporcionalidad (o no).	Es muy importante proponer este tipo de problemas para que los/las estudiantes adquieran una manera de pensar críticamente y evitar el uso sistemático de procedimientos de proporcionalidad. Ejemplos: problemas 4 y 5.
Problemas de comparación.	Dos cantidades están presentes pero involucradas en dos situaciones diferentes. La pregunta se refiere a la comparación de las dos situaciones. Ejemplos: problemas 6 y 7.
Problemas de porcentajes, escalas, ampliación y reducción.	En estos problemas, el estudio de las proporcionales se lleva a cabo a través de nociones que son más inusuales para los/las estudiantes. Ejemplos: problemas 1, 8, 9 y 12.
Problemas de proporciones, probabilidades.	Si bien la noción de proporcionalidad se explicita en la definición clásica de probabilidad propuesta por Laplace (razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente "probables"), el vínculo entre ambas nociones puede abordarse mucho antes de que los/las estudiantes conozcan esa definición. Ejemplos: problemas 2 y 11.

Problemas de funciones lineales.	El estudio de la proporcionalidad desde una perspectiva funcional implica hacer foco en la manera en que varían las magnitudes involucradas, así como en el dominio de validez de la relación. Ejemplo: problema 10.

En los ejemplos presentados, no sólo varía el tipo de problema sino que también el nivel de complejidad del trabajo matemático es diferente; por ejemplo, una tarea de comparación de probabilidades es siempre más difícil que una de comparación de fracciones en un contexto determinista. Si bien algunos de estos tipos de problemas no son abordados en la escolaridad primaria, es interesante presentar a los/las estudiantes del profesorado diferentes situaciones en donde aparezca la proporcionalidad como objeto de estudio y proponer la puesta en común de las soluciones, revisar sus propias concepciones y los sentidos construidos en torno a este concepto.

El estudio de la proporcionalidad en la educación primaria

Muchos trabajos –principalmente de la psicología cognitiva– consideran el esquema de proporción como un componente básico del razonamiento formal, que será necesario, entre otros conceptos, para adquirir los de probabilidad y correlación. Sin embargo, esto no quiere decir que los/las niños/niñas no tengan una percepción progresiva de las proporciones. Los resultados de diversas investigaciones brindan orientaciones sobre cómo ayudarlos/ayudarlas en el desarrollo del razonamiento proporcional. Van de Walle (como se citó en Godino y Batanero, 2002) aporta algunas estrategias posibles:

1. Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.
2. Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones. Procurar que los niños distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad) de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.
3. Ayudar a los niños a relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos. El concepto de fracción unitaria es muy similar al de tasa unitaria. El uso de tasas unitarias para comparar razones y resolver proporciones es una de las técnicas más apropiadas.
4. Reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de "regla de tres" para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta

> que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente. (pp. 433-434)

Presentar a los/las estudiantes estas estrategias en relación a la enseñanza de la proporcionalidad puede también significar una invitación a revisar su propio recorrido de aprendizaje. Algunas preguntas que pueden ser útiles para abrir el debate y la reflexión: ¿qué tipo de situaciones les resultan familiares?, ¿qué tipo de problemas no reconocen haber resuelto en su paso por la escuela primaria?, ¿qué lugar ocupó el aprendizaje de la regla de tres en su experiencia como estudiantes?

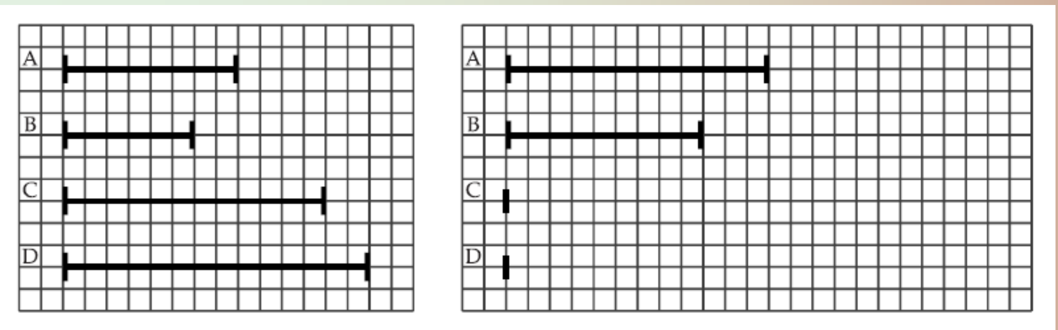
A continuación, se puede proponer la siguiente tarea de indagación:

A partir de las sugerencias que resultan de investigaciones realizadas en el campo y los tipos de problemas presentados anteriormente, analicen libros de textos de educación primaria, intentando responder a los interrogantes que se detallan aquí: ¿qué tipos de problemas aparecen? ¿Se ofrece una diversidad de recursos (uso de material concreto, imágenes, mapas, simuladores)? ¿Es posible observar una secuenciación en los problemas propuestos (en término de tipo, complejidad, etc.)?

Errores frecuentes en torno a la proporcionalidad

En esta sección del itinerario, focalizaremos no sólo en el objeto de enseñanza –en nuestro caso, la proporcionalidad–, sino también en cuestiones relacionadas con la identificación de los errores más comunes en la resolución que llevan a cabo los/las estudiantes, haciendo referencia al *Diseño Curricular* (ME, 2011-2020) de nuestra asignatura en educación primaria. Comencemos por analizar una actividad que fue propuesta a estudiantes de CM2 (equivalente a quinto grado) en Francia (Daval, 2016):

Aquí hay cuatro segmentos A, B, C, D; queremos agrandarlos. Se ampliaron los segmentos A y B. Realiza la misma ampliación para los segmentos C y D.



Fuente: extraído de Daval, 2016, p. 104.

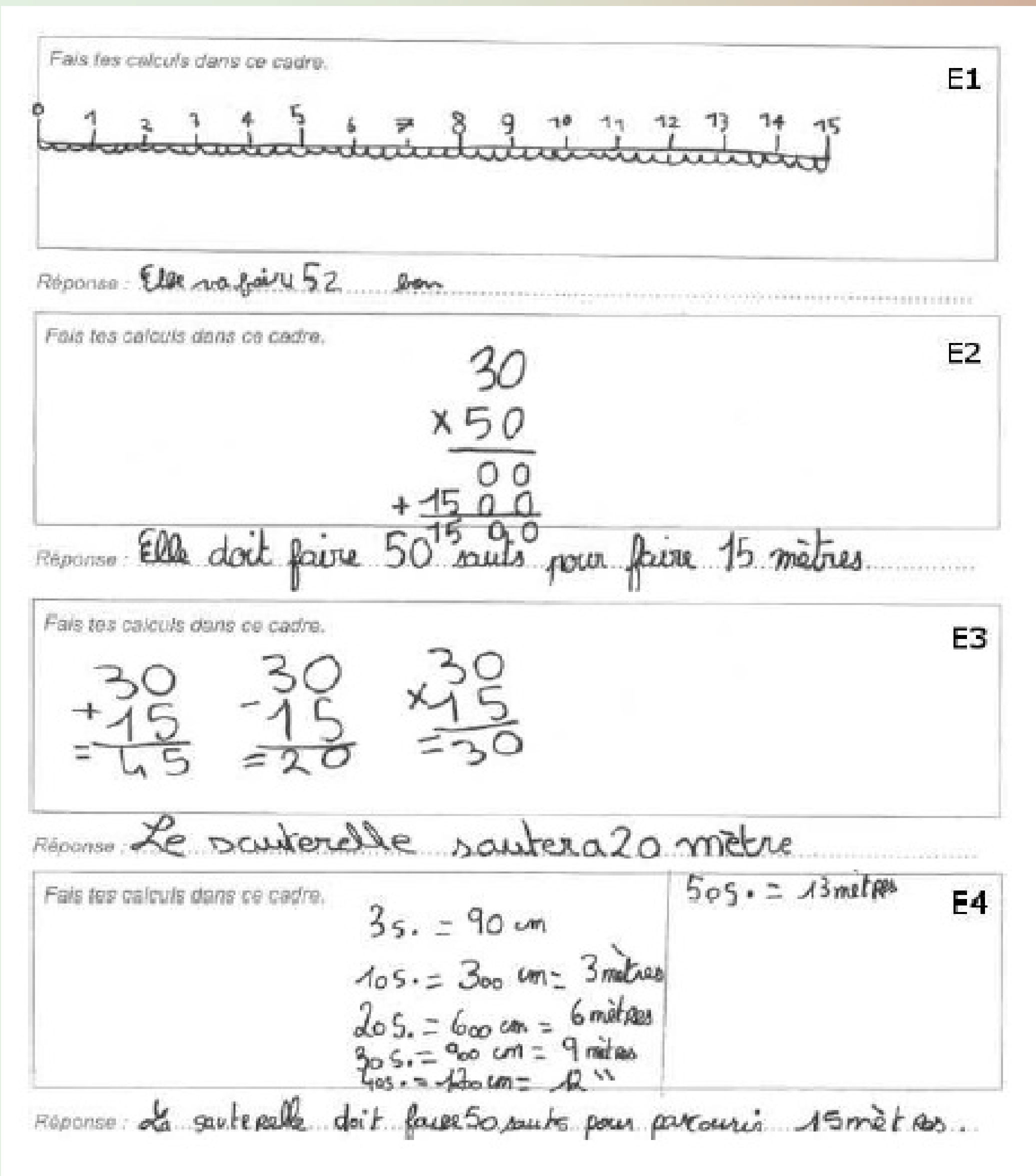
1) ¿Qué concepto matemático está involucrado principalmente en este ejercicio?
2) Identifiquen en el *Diseño Curricular* (ME, 2011-2020) el aprendizaje que se aborda en el ejercicio y expliquen en qué grado se podría trabajar esta actividad. Justifiquen su respuesta.
3) ¿Cuáles son las principales variables didácticas que pueden dificultar la resolución del ejercicio?
4) Indiquen tres procedimientos correctos que los/las estudiantes pueden utilizar para responder, tomando como referencia el grado propuesto en el ítem 2.
5) Observen las siguientes respuestas de cinco estudiantes. Identifiquen errores y formulen hipótesis sobre el origen de cada uno (tengan en cuenta que la longitud de los segmentos está medida en cantidad de cuadraditos).

	Longitud segmento C	Longitud segmento D
Estudiante 1	16	18
Estudiante 2	18	20
Estudiante 3	18	21
Estudiante 4	12	14
Estudiante 5	16	19

Resolvamos ahora el siguiente problema:

Con cada salto, un saltamontes avanza 30 cm. ¿Cuántos saltos debe dar para recorrer 15 m?

1. En este enunciado, ¿qué indica que se trata de una situación de proporcionalidad?
2. El problema fue propuesto a 4 estudiantes cuyas producciones se ofrecen a continuación:



Fuente: extraído de Daval, 2016, p. 105.

Para cada caso:

a. Expliquen, utilizando la evidencia escrita, si el procedimiento empleado da testimonio de una correcta implementación de las propiedades matemáticas de la proporcionalidad.

b. Elaboren una hipótesis sobre la causa de los errores.

3. Desde un punto de vista teórico, esta situación de proporcionalidad puede ser modelada por una función lineal del número de saltos:

a. Expliquen esta función.

b. Resuelvan el problema usando esta función.

Otra propuesta de actividad que podemos analizar es la siguiente:

Seis artículos idénticos cuestan $150. ¿Cuánto cuestan nueve de estos artículos?

1. En este enunciado, ¿qué indica que es una situación de proporcionalidad?
2. Desde un punto de vista matemático, ¿qué diferencia encuentran entre este enunciado y el anterior?
3. Identifiquen en el *Diseño Curricular* (ME, 2011-2020) los aprendizajes que se abordan y expliquen en qué grado se podría trabajar esta actividad. Justifiquen su respuesta.
4. Propongan dos posibles métodos que puedan aplicar para que los/las estudiantes –que indicaron en el punto anterior– resuelvan este ejercicio. Expliquen las propiedades matemáticas utilizadas en cada uno de los métodos de resolución.

En las actividades de esta sección intentamos analizar diversas producciones de estudiantes y construir hipótesis acerca de las causas de posibles errores. Actualmente, la mayor parte de los/las investigadores/investigadoras y especialistas coinciden en considerar como características generales de estos las siguientes (Rico, 1995):

- ✓ Los errores son sorprendentes (...)
- ✓ Los errores son, a menudo, extremadamente persistentes (...) Son resistentes a cambiar por sí mismos, ya que su corrección puede significar una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.
- ✓ Los errores pueden ser o bien sistemáticos o bien por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto (...)
- ✓ Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan. (s.d)

En este mismo artículo, Rico (1995), tomando como referencia observaciones realizadas por otros investigadores (Brousseau, Davis y Werner, 1986), menciona algunas *sorpresas* con las que puede encontrarse un/una docente: :

- ✓ Los errores son, a menudo, resultado de concepciones inadecuadas respecto de aspectos fundamentales de las matemáticas.

- Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación consistente y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
- También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
- Los alumnos, con frecuencia, inventan sus propios métodos no formales, pero altamente originales para la realización de las tareas que se les proponen. (s.d)

Pero, además de identificar el error, ¿cómo podemos abordarlo? Raffaella Borasi (1989) propone un uso constructivo de los errores como estrategia didáctica: "errores como trampolín para investigar" (p. 4). Asimismo, plantea varias hipótesis acerca de las implicancias pedagógicas del uso de errores como trampolines:

- El estudio y análisis de errores puede proporcionar oportunidades para involucrar a los/las estudiantes en actividades matemáticas creativas y valiosas.
- Los errores pueden motivar la curiosidad y atención de los/las estudiantes, ya que muestran un contraste con lo que se espera inicialmente, o pueden presentar la posibilidad de nuevas alternativas.
- Un análisis de los errores puede ayudar a los/las estudiantes a obtener una mejor comprensión conceptual del contenido matemático, identificando y clarificando interpretaciones equivocadas, enfatizando nuevos aspectos y descubriendo elementos inesperados.
- La consideración de ciertos errores puede ayudar a los/las estudiantes a darse cuenta de algunas limitaciones inherentes que existen en la matemática, así como a apreciar algunos de los aspectos más humanos de la disciplina.
- La experiencia de prestar atención a los errores y trabajar con ellos puede hacer que los/las estudiantes sean más cautos/cautas en su actividad matemática y más independientes de la autoridad para la verificación de su trabajo.
- Un uso constructivo de los errores puede ayudar a los/las estudiantes en la solución de problemas o la realización de otras actividades matemáticas, proporcionando información relevante y puntos de partida concretos.
- El análisis de los errores puede hacer más concreto, y así accesible para los/las estudiantes, la discusión de cuestiones más abstractas (sea respecto a contenido matemático específico o a la naturaleza de la matemática y nociones matemáticas generales).
- Los errores pueden invitar a los/las estudiantes a generar nuevas preguntas y cuestionamientos, para así involucrarse en actividades de proposición de problemas y de resolución. [Traducción de Fernanda Viola]

Análisis de una situación de enseñanza

Introducir a los/las estudiantes en la lectura y análisis de registros de clases les permite tener un acercamiento a lo que *ocurre en el aula* en torno a un objeto de conocimiento. Ver y analizar las producciones de los/las alumnos/alumnas de primaria, así como sus argumentaciones y las intervenciones del/la docente, puede ayudar a poner en juego los propios saberes matemáticos, y las nociones y teorías didácticas de que disponen.

En esta sección, analizaremos un registro de clase de sexto grado, extraído del documento de Crippa et al. (2005). El problema sobre el que se trabaja tiene el siguiente enunciado:

Si una barra de cereales de 22 g contiene 3,5 g de materia grasa, ¿cuánta materia grasa contiene una barra del mismo cereal, de 40 g? (Crippa et al., 2005, p. 65)

Para la resolución del problema, y en función de la finalidad del docente, la clase se organizó en varias etapas:

1. trabajo individual;
2. trabajo grupal: los/las niños/niñas se juntaron en grupos de 3 ó 4 integrantes para discutir las respuestas que habían dado al problema y acordar cuál de ellas sería expuesta como solución del grupo;
3. puesta en común: en la que cada grupo expuso a toda la clase su solución, dio argumentos para convencer a los/las demás acerca de la validez de la misma y se debatió cada propuesta;
4. análisis: con el apoyo del/la docente, identificaron las cuestiones que aprendieron a través del problema (en el registro sólo figuran las etapas 3º y 4º).

Como actividad previa al análisis del registro propiamente dicho, les solicitamos que respondan las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué tipo de problema de proporcionalidad es?
- ✓ ¿Qué procedimientos podrían haber desplegado los/las niños/niñas para resolverlo?
- ✓ ¿Qué errores podrían haber aparecido en dichos procedimientos?
- ✓ ¿Por qué suponen que la clase se organizó con un momento de trabajo individual, otro grupal y finalmente con un momento de trabajo colectivo?

Ahora les proponemos la lectura del registro, presentado en un fragmento del documento *La Proporcionalidad* (Crippa et al., 2005).

Luego de la lectura, respondan:

- ¿Qué objetivos suponen que tenía el/la docente al planificar la clase?
- ¿Qué lugar ocupa la regla de tres simple en su desarrollo?
- ¿Qué tipo de intervenciones realiza el/la docente?, ¿permite el diálogo entre estudiantes?
- ¿Qué tipo de procedimientos se llevan a cabo?
- ¿Qué *tratamiento* tiene el error?, ¿se sanciona la respuesta errónea?, ¿se reflexiona sobre los procedimientos aunque no se llegue a la respuesta correcta?

Siguiendo el análisis de Crippa et al. (2005), notemos que en la primera clase no se cuestiona la utilización de la regla de tres simple, pero tampoco estudiarla es uno de sus objetivos. En este sentido, el/la docente solo trata de que se expliciten los razonamientos que han llevado a los/las estudiantes a aplicar dicha regla. El acento, en un principio, está puesto en que controlen el resultado que obtuvieron y analicen si este es posible. El uso de la calculadora no está cuestionado, dado que en este problema no es deseable que las cuentas obstaculicen la resolución. Los errores asociados a la posicionalidad y a los algoritmos de multiplicación y división podrán ser abordados en otro momento; de esta manera, no se desvía la finalidad del problema. En esta clase se observan intervenciones de diverso tipo que:

- apuntan a dar información acerca de alguna cuestión que se está discutiendo,
- buscan que los/las estudiantes expliciten sus ideas,
- tienden a que los/las estudiantes mejoren sus argumentaciones,
- favorecen la circulación de las ideas,
- apuntan a institucionalizar algo nuevo,
- tienden a resaltar algún aspecto, duda o conclusión,
- promueven que los/las estudiantes validen respuestas por sus propios medios,
- relanzan el problema alterando alguna variable,
- sostienen la incertidumbre acerca de cuál es la respuesta al problema,
- ponen en duda las producciones (correctas e incorrectas),
- tienden a evocar una situación, idea o conocimiento.

Las intervenciones del/de la docente en la etapa de la puesta en común resultan fundamentales. A través de ellas, se puede sostener y orientar el debate en dirección a los objetivos de la clase, enriquecer la discusión y favorecer la democratización de los conocimientos. Observemos que en las clases del registro, la maestra hace una selección de aquellas cuestiones que se han expuesto en la fase colectiva y las escribe en el pizarrón. Además, utiliza dibujos y tablas de valores para poner de relieve las relaciones entre los cálculos que se van haciendo (es decir, los procedimientos numéricos) y los razonamientos más espontáneos, ligados a lo extraescolar. También debemos destacar que en la primera clase el debate no concluye ni se lo fuerza a concluir. El problema queda abierto y se sostiene la incertidumbre hasta la clase siguiente. La maestra utiliza esta ausencia de conclusiones cuando pide a los/las estudiantes que relaten lo estudiado, rescatando así los conocimientos que se utilizaron para resolver el ejercicio y los que han circulado durante la discusión.

En esta segunda clase, pueden identificarse tres momentos importantes:

- ✓ evocación de lo estudiado en la clase anterior, relatado por algunos/algunas estudiantes y orientado por la maestra;
- ✓ institucionalización de lo aprendido: de toda la información aportada, la maestra selecciona y define cuestiones relacionadas con el saber al que se apunta;
- ✓ estudio de nuevos problemas, para reinvertir lo aprendido y para establecer sus límites.

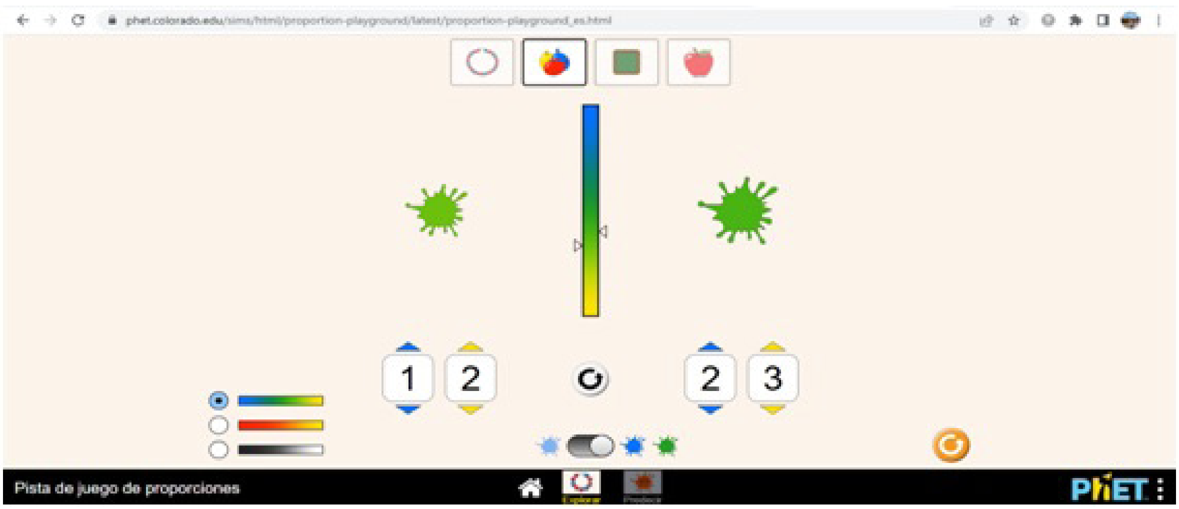
Les proponemos realizar los problemas que se plantean al concluir el registro, analizando su finalidad. Se sugiere apoyarse en los objetivos, contenidos y aprendizajes propuestos en el *Diseño Curricular de la Educación Primaria* (ME, 2011-2020).

Uso de simuladores para explorar la proporcionalidad

Con el objetivo de incorporar otras tecnologías en el aula, les proponemos la siguiente actividad:

Jugando con la proporcionalidad: los/las invitamos a explorar el siguiente simulador *Pista de juego de proporciones*.

Las simulaciones interactivas PhET forman parte de un proyecto de la Universidad de Colorado en Boulder, que consiste en crear simulaciones interactivas gratuitas de matemáticas y ciencias. De acuerdo a lo expresado en su página *web*, "las simulaciones de PhET se basan en investigación educativa extensiva e involucran a los estudiantes mediante un ambiente intuitivo y similar a un juego, en donde aprenden explorando y descubriendo". En esta misma página podrán encontrar una extensa lista de simulaciones relacionadas con matemática, física y química. En particular, la simulación *Pista de juego de proporciones* propone dos opciones: *explorar* y *predecir*. En la primera de ellas, encontramos distintos elementos para la exploración. En relación al desarrollo matemático a desplegar con el simulador, en la imagen siguiente podemos apreciar, por ejemplo, que en la sección *explorar* se trabaja con pinturas y colores. En esta imagen podemos ver que, a la izquierda, tenemos una medida de azul y dos de pintura amarilla, obteniendo así pintura de color verde; mientras que en la de la derecha, se agrega una medida a cada color, resultando así dos medidas de pintura azul y tres de amarilla, con las que se obtiene también el color verde. ¿Qué nos permite visualizar esta simulación?, ¿qué propiedades de la proporcionalidad directa permite explorar?, ¿qué nociones previas nos habilita refutar? A partir de la *constatación empírica*, ¿qué preguntas podemos formular?



Incorporar este tipo de tareas a nuestras clases nos permite trabajar distintas nociones, no sólo sobre el objeto matemático en estudio, sino también en relación a la didáctica.

Otra actividad interesante puede ser analizar dicho simulador, *Pista de juego de proporciones*. Podemos proponer distintas dimensiones de análisis, como por ejemplo: características pedagógicas, facilidad de uso e interacción del/la estudiante con la simulación, contenido matemático. A continuación, les ofrecemos algunas preguntas que podrían plantearse en cada una de estas dimensiones:

Luego de explorar la simulación *Pista de juego de proporciones*, los/las invitamos a que las analicen teniendo en cuenta los ítems y preguntas que se detallan a continuación:

a. Características pedagógicas: la simulación, ¿puede ser utilizada para despertar el interés del/la estudiante por el contenido en juego?, ¿como una revisión y/o refuerzo de un contenido ya trabajado?, ¿permite el desarrollo de un contenido nuevo?

b. Facilidad de uso. Interfaz. Interacción del/la estudiante con la simulación: los mensajes exhibidos, ¿son amigables, claros y fáciles de entender, de acuerdo al público al que está dirigido? La interfaz, ¿informa al/la estudiante el andamiaje de las tareas que están siendo realizadas? La simulación, en el caso de haberse solicitado algo indebido, ¿presenta mensajes alertando al/la estudiante sobre la imposibilidad de realizar determinada acción? De haber escogido erróneamente una función de la simulación, ¿existen modos en que el/la estudiante pueda dejar un estado no deseado?, ¿tiene opción de modificar elementos de la interfaz? La simulación, ¿posee algún sistema de ayuda?, ¿explica las dudas del/la estudiante adecuadamente?, ¿ofrece posibilidades de interacción con el/la estudiante?, ¿posee mecanismos que impidan al/la estudiante acertar la respuesta sin utilizar los conceptos matemáticos?, ¿posibilita que se formulen hipótesis a partir de su uso?

c. Contenido matemático: la simulación, ¿utiliza las convenciones y definiciones matemáticas de manera correcta? Los conceptos presentados, ¿son correctos? La forma de abordaje de los conceptos, ¿permite que el/la estudiante los comprenda de manera adecuada? Los conceptos incluidos en la simulación (o a través de esta), ¿pueden ser relacionados con otros conceptos matemáticos?, ¿pueden vincularse con conceptos de otras disciplinas? La simulación, ¿trabaja (o permite trabajar) los contenidos de forma gradual?

Estas dos tareas (explorar el recurso y analizarlo) son ejemplos de actividades posibles a realizar respecto del simulador elegido. Se puede solicitar a los/las estudiantes que diseñen una propuesta de enseñanza apoyada en el uso del simulador, atendiendo a los contenidos del *Diseño Curricular de la Educación Primaria* (ME, 2011-2020) y teniendo en cuenta las discusiones realizadas en relación a los tipos de problemas, intervenciones docentes, errores frecuentes presentes en las producciones de los/las estudiantes, etc.

A modo de cierre

Este itinerario tiene como intención ofrecer una secuencia posible para el tratamiento del eje *Enseñanza de magnitudes proporcionales* en la formación de docentes de educación primaria, y organiza los contenidos alrededor de la pregunta *¿por qué enseñar proporcionalidad?* En resumen, el recorrido intenta conjugar el qué, el por qué y el cómo, tratando de poner en diálogo el objeto de estudio con la didáctica de la matemática.

En este sentido, consideramos que esta dinámica también puede ser pensada en otros ejes, en torno a distintos objetos matemáticos correspondientes a esta unidad curricular, intentando resignificarlos en términos de objetos de enseñanza.

Se pretende que el texto del presente itinerario entre en diálogo con sus propias ideas, con las particularidades de los contextos locales en que ustedes desarrollan sus prácticas y con las propuestas específicas que despliegan con cada grupo de estudiantes.

Bibliografía

Borasi, R. (1989). Students' constructive uses of mathematical errors: a taxonomy. [Paper] *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* California.

Córdoba. Ministerio de Educación (2015). *Diseño Curricular para los Profesorados de Educación Inicial y Primaria*. https://dges-cba.infd.edu.ar/sitio/curriculares/upload/Disenio_Curr_Primaria_Inicial_2015.pdf

Córdoba. Ministerio de Educación (2011-2020). *Diseño Curricular de la Educación Primaria*. https://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionPrimaria/DCJ_Primario-23-02-2018.pdf

Crippa, A.; Grimaldi, V. y Machiunas, M. (2005). La Proporcionalidad. En *Documento de apoyo a la capacitación Proyecto Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la Educación Primaria Básica*, pp. 65-71. Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación. Gobierno de la provincia de Buenos Aires. http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/proporcionalidad.pdf

Daval, N. (2016). Chapitre T2. Proportionnalité (didactique). En *Ressources du Institut National Supérieur du Professorat et de l´Éducation, Académie de La Réunion*, pp. 99-108. https://inspe.univ-reunion.fr/fileadmin/Fichiers/ESPE/disciplines/Mathematiques_PE/Ressources/T2.pdf

Godino, J. y Batanero, C. (2002). *Matemática y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros.

Panizza, M. y Sadovsky, P. (1991). *El papel del problema en la construcción del concepto matemático.* FLACSO y Ministerio de Educación provincia de Santa Fe. https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/proporcionalidad_panizza_sadovsky.pdf

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, pp. 69-108. Grupo Editorial Iberoamérica.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics.* Longman.

Villarreal, M., Esteley, C. y Alagia, H. (2007). Sobregeneralización de modelos lineales: estrategias de resolución en contextos universitarios. *Revista de Educación Matemática*, *22*, 3-15. Universidad Nacional de Córdoba. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10487/11171

Autoridades

Juan Schiaretti
Gobernador

Manuel Calvo
Vicegobernador

Walter Mario Grahovac
Ministro de Educación

Noemí Patricia Kisbye
Secretaria de Promoción de la Ciencia y las Nuevas Tecnologías

Delia Provinciali
Secretaria de Educación

Jorge Jaimez
Subsecretario de Planeamiento, Evaluación y Modernización

Edith Teresa Flores
Directora General de Educación Inicial

Stella Maris Adrover
Directora General de Educación Primaria

María Cecilia Soisa
Directora General de Educación Secundaria

Claudia Aída Brain
Directora General de Educación Técnica y Formación Profesional

Liliana del Carmen Abrate
Directora General de Educación Superior

Alicia Beatriz Bonetto
Directora General de Educación Especial y Hospitalaria

Carlos Omar Brene
Director General de Educación de Jóvenes y Adultos

Hugo Ramón Zanet
Director General de Institutos Privados de Enseñanza

Santiago Amadeo Lucero
Director General de Programas Especiales

Edgardo Atilio Carandino
Director General de Desarrollo Curricular, Capacitación y Acompañamiento Institucional

Luciano Nicolás Garavaglia
Secretario de Gestión Administrativa

Virginia Cristina Monassa
Directora General de Coordinación y Gestión de Recursos Humanos

Carlos Ricardo Giovannoni
Director General de Infraestructura Escolar

ProFoDI·MC

Programa de Formación Docente
Inicial en Modalidad Combinada

Dirección General de
EDUCACIÓN SUPERIOR

Ministerio de
EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA
PROVINCIA DE
CÓRDOBA

entre
todos

Hacemos